Teoria de Ramsey em grafos aleatórios: cliques e ciclos

Trabalho conjunto com A. Liebenau, W. Mendonça e J. Skokan

Grafos Ramsey

$G \to F$ se em toda coloração das arestas de G com vermelho ou azul podemos encontrar F monocromático

Grafos Ramsey

$G \to F$ se em toda coloração das arestas de G com vermelho ou azul podemos encontrar F monocromático

Exemplos: $K_5 \not\to K_3$ e $K_6 \to K_3$

Grafos Ramsey

$G \to F$ se em toda coloração das arestas de G com vermelho ou azul podemos encontrar F monocromático

Exemplos: $K_5 \not\to K_3$ e $K_6 \to K_3$

Teorema de Ramsey: Para todo F existe G tal que $G \to F$

Grafos Ramsey

$G \to F$ se em toda coloração das arestas de G com vermelho ou azul podemos encontrar F monocromático

Exemplos: $K_5 \not\to K_3$ e $K_6 \to K_3$

Teorema de Ramsey: Para todo F existe G tal que $G \to F$

Pergunta natural: Quando $G(n,p) \to F$?

Rödl – Ruciński (90's)

Para quase todo F, o threshold para $G(n,p) \to F$ é da ordem de $n^{-1/m_2(F)}$, onde

$$m_2(F) := \max\left\{ \frac{e(H)-1}{v(H)-2} : H \subseteq F \right\}.$$

Rödl – Ruciński (90's)

Para quase todo F, o threshold para $G(n,p) \to F$ é da ordem de $n^{-1/m_2(F)}$, onde

$$m_2(F) := \max\left\{ \frac{e(H)-1}{v(H)-2} : H \subseteq F \right\}.$$

Intuição: $G(n,p) \to F$ se cn^2p arestas estão em uma cópia de F

Rödl – Ruciński (90's)

Para quase todo F, o threshold para $G(n,p) \to F$ é da ordem de $n^{-1/m_2(F)}$, onde

$$m_2(F) := \max \left\{ \frac{e(H)-1}{v(H)-2} : H \subseteq F \right\}.$$

Intuição : $G(n,p) \to F$ se cn^2p arestas estão em uma cópia de F

$\Rightarrow n^{v(H)} p^{e(H)} \gg n^2 p$ para todo $H \subseteq F$

Rödl – Ruciński (90's)

Para quase todo F, o threshold para $G(n,p) \to F$ é da ordem de $n^{-1/m_2(F)}$, onde

$$m_2(F) := \max\left\{ \frac{e(H)-1}{v(H)-2} : H \subseteq F \right\}.$$

Intuição: $G(n,p) \to F$ se cn^2p arestas estão em uma cópia de F

$$\Rightarrow \quad p \gg n^{-\frac{e(H)-1}{v(H)-2}} \text{ para todo } H \subseteq F$$

Ramsey Assimétrico

$G \to (F, H)$ se em toda coloração das arestas de G com vermelho ou azul podemos encontrar F ou H.

Ramsey Assimétrico

$G \to (F, H)$ se em toda coloração das arestas de G com vermelho ou azul podemos encontrar F ou H.

Pergunta natural: Quando $G(n,p) \to (F, H)$?

Ramsey Assimétrico

$G \to (F,H)$ se em toda coloração das arestas de G com vermelho ou azul podemos encontrar F ou H.

Pergunta natural: Quando $G(n,p) \to (F,H)$?

Conjectura (Kohayakawa - Kreuter '97):

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(G(n,p) \to (F,H) \Big) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq c\, n^{-\frac{1}{m_2(F,H)}} \quad (0\text{-statement}) \\ 1 & \text{se } p \geq C\, n^{-\frac{1}{m_2(F,H)}} \quad (1\text{-statement}) \end{cases}$$

Resultados:

(Kohayakawa - Kreuter '97) 0 e 1 - statement para (C_ℓ, C_k)

(Marciniszyn, Skokan, Spöhel, Steger '09) 0- statement para (K_ℓ, K_p) + 1- statement para grafos estritamente 2-balanceados

(Kohayakawa, Schacht, Spöhel '14) 1- statement quando F é estritamente balanceado com respeito a $m_2(\cdot, H)$

(Gugelman, Nenadov, Person, Škorić, Steger, Thomas '17) Algumas condições que implicam o 0- statement + 1- statement se $p \geq n^{-\frac{1}{m_2(F,H)}} \log n$

(Mousset, Nenadov, Samotij '20) 1 - statement para todos os pares

Resultados:

(Kohayakawa-Kreuter '97) 0-statement para (C_ℓ, C_k)

(Marciniszyn, Skokan, Spöhel, Steger '09) 0-statement para (K_ℓ, K_r)

(Gugelman, Nenadov, Person, Škorić, Steger, Thomas '17) Algumas condições que implicam o 0-statement

Teorema (Liebenau, M., Mendonça, Skokan '21+)

Se $p \leq c\, n^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)\big) = 0$$

Teorema (Liebenau, M., Mendonça, Skokan '21+)

Se $p \leq c\, n^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$, então

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\big(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)\big) = 0$$

Principal ferramenta: caracterização estrutural de grafos Ramsey + aplição do Algoritmo de Kohayakawa – Kreuter.

Intuição para encontrar o threshold $n^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$

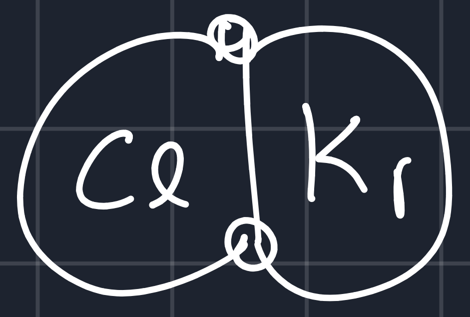
Se $G(n,p) \to (K_r, C_\ell)$, então existe $G \subseteq G(n,p)$ tal que

$$\begin{cases} G \to (K_r, C_\ell) \\ G \setminus \{e\} \not\to (K_r, C_\ell) \quad \forall\, e \in G \end{cases}$$

Intuição para encontrar o threshold $n^{-\frac{1}{m_2(K_r,C_\ell)}}$

Se $G(n,p) \to (K_r, C_\ell)$, então existe $G \subseteq G(n,p)$ tal que

$$\begin{cases} G \to (K_r, C_\ell) \\ G \setminus \{e\} \not\to (K_r, C_\ell) \quad \forall\, e \in G \end{cases}$$

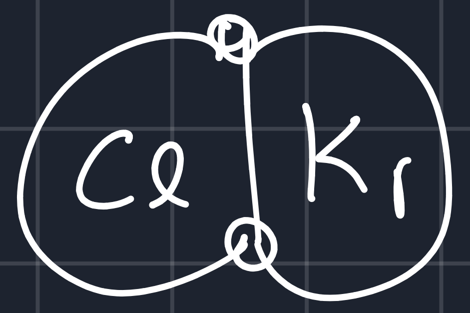
$\Longrightarrow$ Para toda $e \in G$, temos 

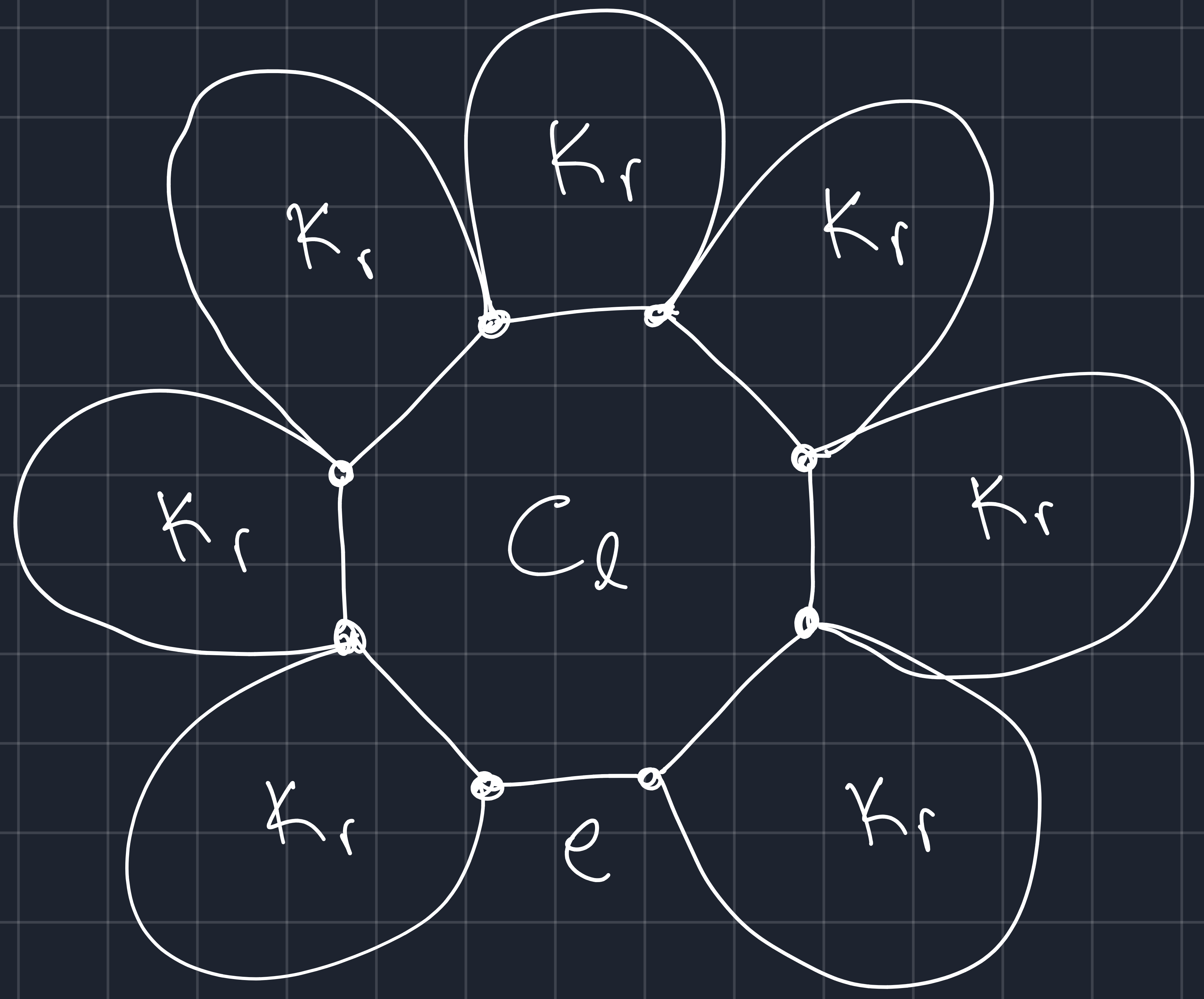
Intuição para encontrar o threshold $n^{-\frac{1}{m_2(K_r,C_\ell)}}$

Se $G(n,p) \to (K_r, C_\ell)$, então existe $G \subseteq G(n,p)$ tal que

$$\begin{cases} G \to (K_r, C_\ell) \\ G \setminus \{e\} \not\to (K_r, C_\ell) \quad \forall e \in G \end{cases}$$

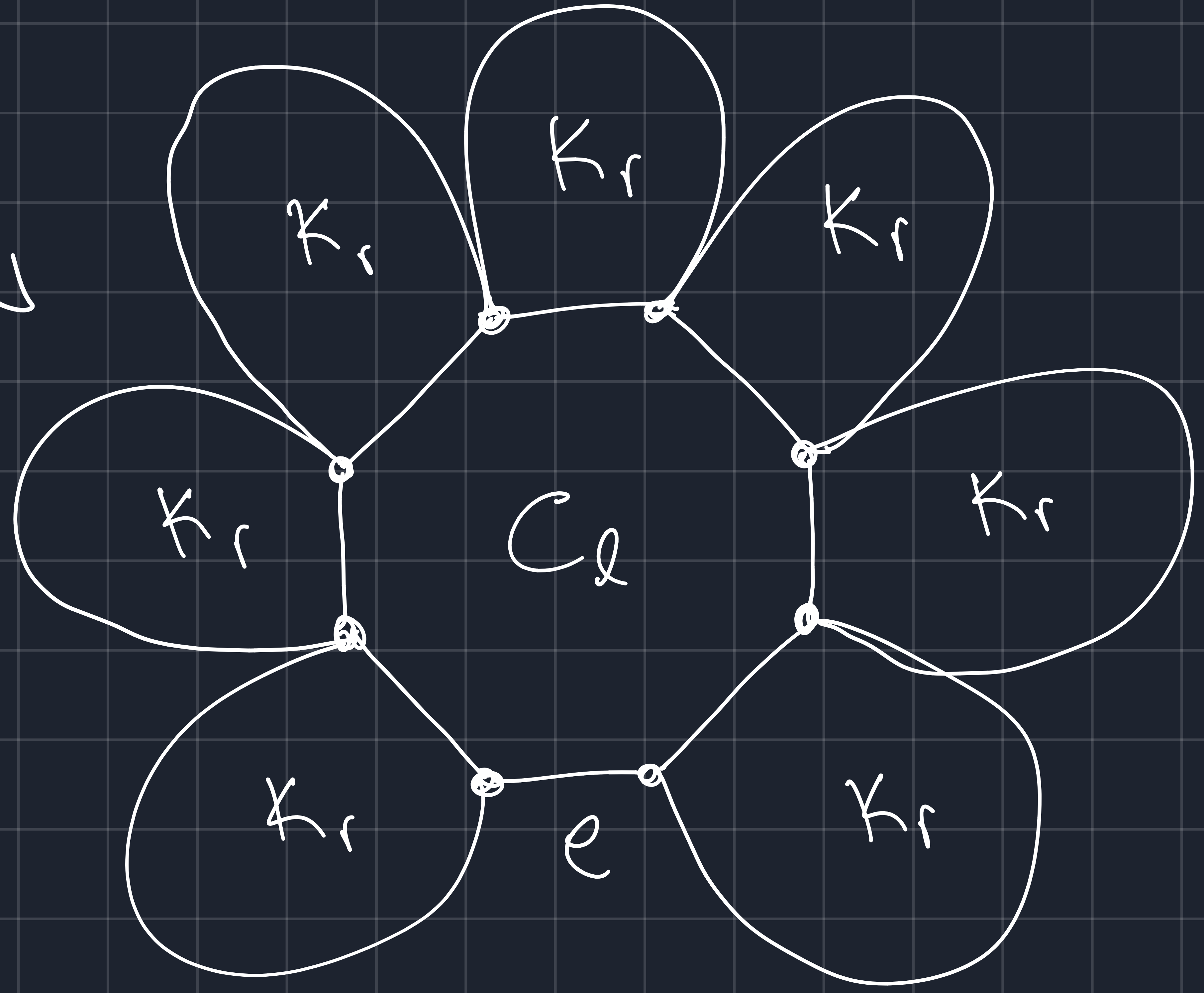
$\Longrightarrow$ Para toda $e \in G$, temos





Intuição para encontrar o threshold $n^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$

A maioria das arestas $e \in G(n,p)$ deve estar contida em uma estrutura desse tipo

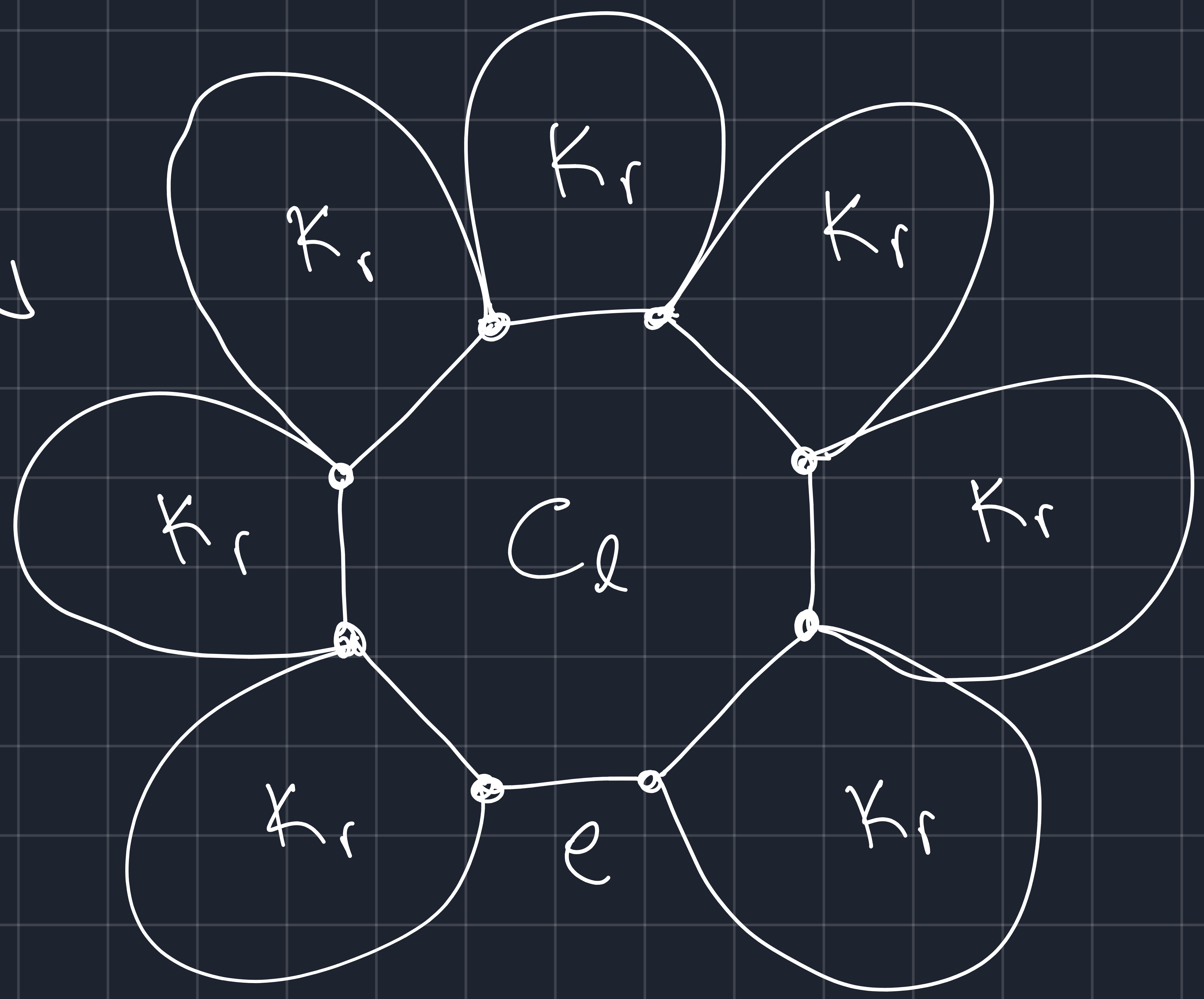


Flor F

Intuição para encontrar o threshold $n^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$

A maioria das arestas $e \in G(n,p)$ deve estar contida em uma estrutura desse tipo

X_F = # cópias de F em $G(n,p)$



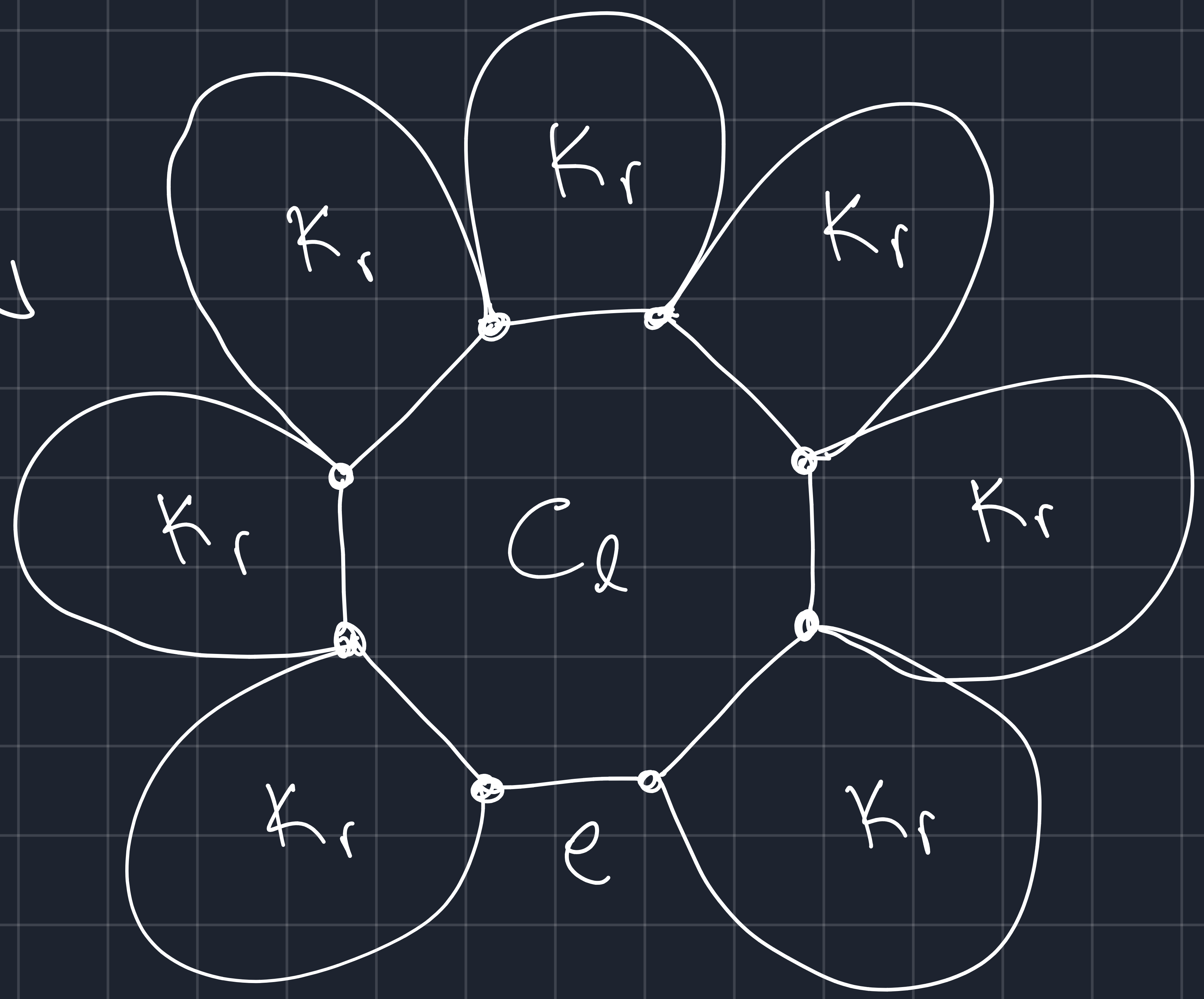
Flor F

Intuição para encontrar o threshold $n^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$

A maioria das arestas $e \in G(n,p)$ deve estar contida em uma estrutura desse tipo

X_F = # cópias de F em $G(n,p)$

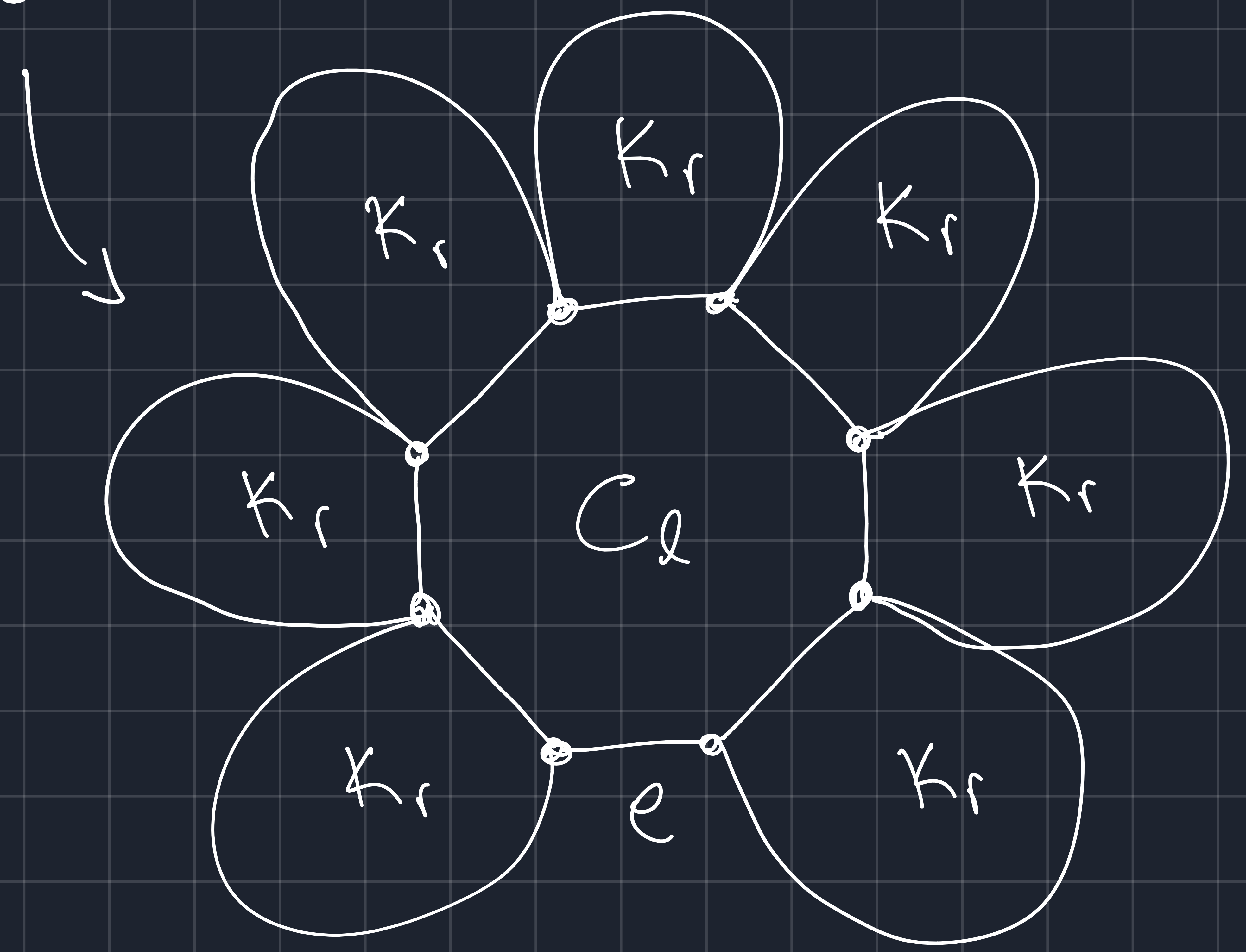
$$\mathbb{E}(X_F) \geq c n^2 p$$



Flor F

Intuição para encontrar o threshold $n^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$

A maioria das arestas $e \in G(n,p)$ deve estar contida em uma estrutura desse tipo



Flor F

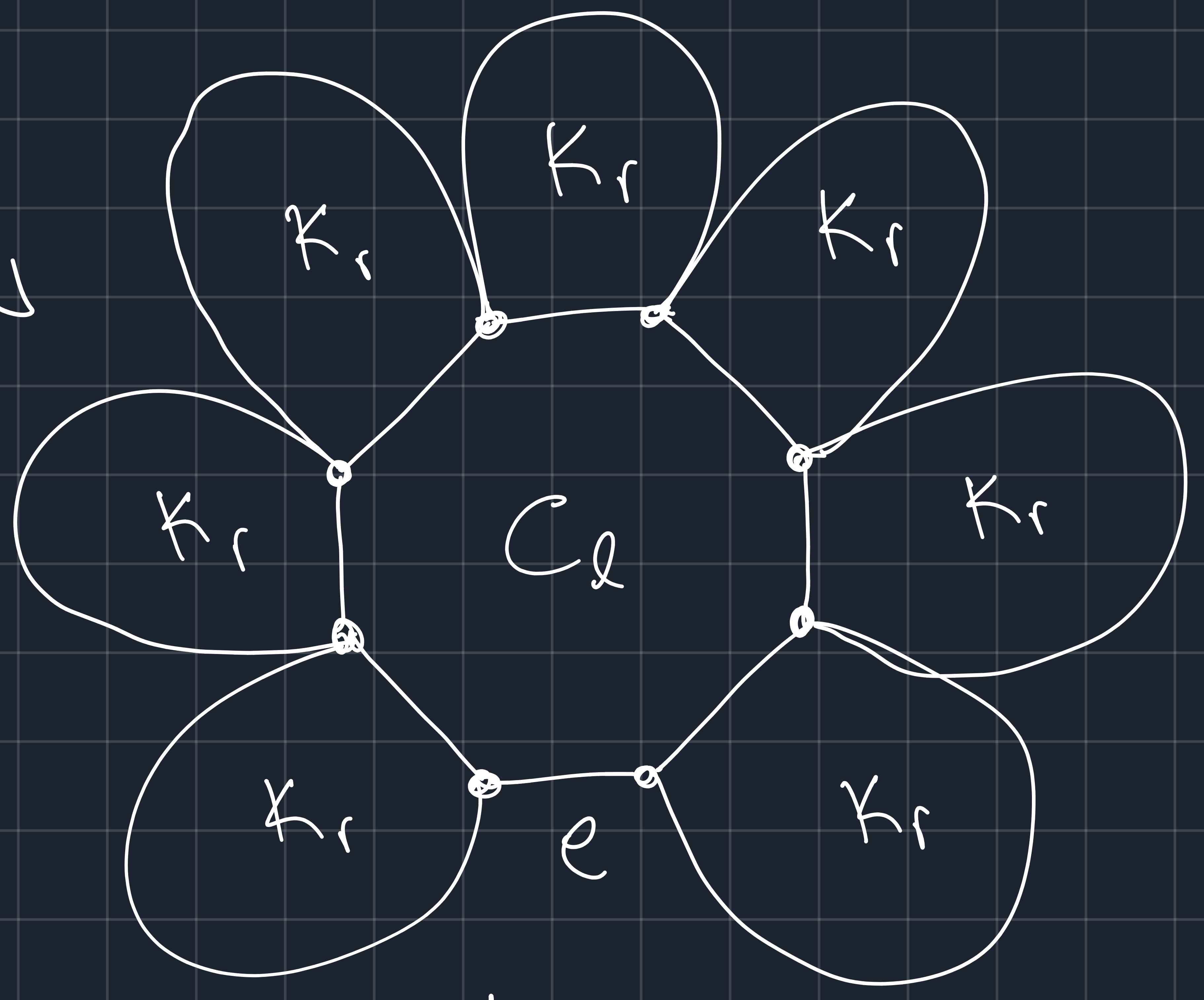
X_F = # cópias de F em $G(n,p)$

$\mathbb{E}(X_F) \geq cn^2 p \iff$

$$n^{(r-1)(\ell-1)+1} p^{\binom{r}{2}\cdot(\ell-1)+1} \geq cn^2 p$$

Intuição para encontrar o threshold $n^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$

A maioria das arestas $e \in G(n,p)$ deve estar contida em uma estrutura desse tipo



Flor F

X_F = # cópias de F em $G(n,p)$

$$\mathbb{E}(X_F) \geq cn^2 p \iff$$

$$n^{(r-1)(\ell-1)+1} p^{\binom{r}{2}\cdot(\ell-1)+1} \geq cn^2 p$$

$$\Rightarrow p \geq cn^{-\frac{1}{m_2(K_r, C_\ell)}}, \quad m_2(K_r, C_\ell) := \frac{\binom{r}{2}(\ell-1)}{(r-1)(\ell-1)-1}$$

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{ G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n \}$$

$$\mathbb{P}\big(G(n,p) \to (K_r, C_\ell) \big) = \mathbb{P}\big(G(n,p) \in \mathcal{R}_n \big)$$

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

$$\mathbb{P}\Big(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)\Big) = \mathbb{P}\Big(G(n,p) \in \mathcal{R}_n\Big) \le \sum_{G \in \mathcal{R}_n} \mathbb{P}(G \subseteq G(n,p))$$

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

$$\mathbb{P}\Big(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)\Big) = \mathbb{P}\Big(G(n,p) \in \mathcal{R}_n\Big) \leq \underbrace{\sum_{G \in \mathcal{R}_n} \mathbb{P}(G \subseteq G(n,p))}_{\text{muito grande!}}$$

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

Como 'contornar' a cota da união?

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad e \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

Como 'contornar' a cota da união?

Encontramos uma família $\mathcal{F}$ de grafos e uma função $f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{F}$

tal que

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

Como 'contornar' a cota da união?

Encontramos uma família $\mathcal{F}$ de grafos e uma função $f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{F}$ tal que

① $|\mathcal{F}|$ é pequeno

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

Como 'contornar' a cota da união?

Encontramos uma família $\mathcal{F}$ de grafos e uma função $f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{F}$ tal que

① $|\mathcal{F}|$ é pequeno

② $f(G) \subseteq G$

Ideia da prova:

Defina

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

Como 'contornar' a cota da união?

Encontramos uma família $\mathcal{F}$ de grafos e uma função $f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{F}$ tal que

1. $|\mathcal{F}|$ é pequeno
2. $f(G) \subseteq G$
3. $F \in \mathcal{F} \Rightarrow$ ou F é pequeno e denso
   ou F é muito grande e estruturado

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad e \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad e \quad \mathcal{R}_n := \{ G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n \}$$

$$\mathcal{Y}_1(\varepsilon) := \{ G : \lambda(G) \leq -\varepsilon \}$$

$$\mathcal{Y}_2(M, n) := \{ G : \lambda(G) \leq M \ e \ e(G) \geq \log n \}$$

$$\lambda(G) := v(G) - \frac{e(G)}{m_2(K_r, C_\ell)} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n := \{G : G \to (K_r, C_\ell),\ v(G) = n\}$$

$$\mathcal{Y}_1(\varepsilon) := \{G : \lambda(G) \leq -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{Y}_2(M, n) := \{G : \lambda(G) \leq M \text{ e } e(G) \geq \log n\}$$

Teorema (Liebenau, M., Mendonça, Skokan '21+) $r, \ell \geq 4$

Existem $\varepsilon, M > 0$ tais que o seguinte vale: para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{Y}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{Y}_2(M, n)$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{ G : \lambda(G) \leq -\varepsilon \}$$

$$\mathcal{J}_2(M, n) = \left\{ G : \begin{array}{l} \lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n \end{array} \right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \leq -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M, n) = \left\{ G : \begin{array}{l} \lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n \end{array} \right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{ G : \lambda(G) \leq -\varepsilon \}$$

$$\mathcal{J}_2(M, n) = \left\{ G : \begin{array}{l} \lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n \end{array} \right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}\left(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{ F \subseteq G(n,p) \} \right)$$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \leq -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{G : \begin{array}{l}\lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n\end{array}\right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}\big(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)\big) \leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{F \subseteq G(n,p)\}\Big)$$

- $F \in \mathcal{I}_1$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{ G : \lambda(G) \leq -\varepsilon \}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{ G : \begin{array}{l} \lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n \end{array} \right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{ F \subseteq G(n,p) \} \right)$$

- $F \in \mathcal{I}_1$

$$\mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{v(F)} p^{e(F)}$$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{ G : \lambda(G) \leq -\varepsilon \}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{ G : \begin{array}{l} \lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n \end{array} \right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

▶ $f(G) \subseteq G$

▶ $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{ F \subseteq G(n,p) \} \right)$$

▶ $F \in \mathcal{I}_1$

$$\mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{v(F)} p^{e(F)}$$

$$\leq n^{\lambda(F)}$$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \le -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{G : \begin{array}{l}\lambda(G) \le M, \\ e(G) > \log n\end{array}\right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \le (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}\big(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)\big) \le \mathbb{P}\Big(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{F \subseteq G(n,p)\}\Big)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \le n^{-\varepsilon}$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \leq -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{G : \begin{array}{l}\lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n\end{array}\right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\tilde{\mathcal{I}}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\tilde{\mathcal{I}}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{F \subseteq G(n,p)\}\right)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-\varepsilon}$
- $F \in \mathcal{I}_2$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{ G : \lambda(G) \leq -\varepsilon \}$$

$$\mathcal{J}_2(M, n) = \left\{ G : \begin{array}{l} \lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n \end{array} \right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{ F \subseteq G(n,p) \} \right)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-\varepsilon}$
- $F \in \mathcal{I}_2$

$$\mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{v(F)} p^{e(F)}$$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \leq -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{G : \begin{array}{l} \lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n \end{array}\right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{F \subseteq G(n,p)\}\right)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-\varepsilon}$
- $F \in \mathcal{I}_2$

$$\mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{v(F)} p^{e(F)}$$

$$p = 2^{-2M} n^{-\frac{1}{m_2}}$$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \leq -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{G : \begin{array}{l}\lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n\end{array}\right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{F \subseteq G(n,p)\}\right)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-\varepsilon}$
- $F \in \mathcal{I}_2$

$$\mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{v(F)} p^{e(F)} \leq 2^{-2M e(F)} n^{\lambda(F)}$$

$$p = 2^{-2M} n^{-\frac{1}{m_2}}$$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \le -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{G : \begin{array}{l}\lambda(G) \le M, \\ e(G) > \log n\end{array}\right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \le (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \le \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{F \subseteq G(n,p)\}\right)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \le n^{-\varepsilon}$
- $F \in \mathcal{I}_2$

$$\mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \le n^{v(F)} p^{e(F)} \le 2^{-2M e(F)} n^{\lambda(F)} \le n^{-2M} \cdot n^{M}$$

$$p = 2^{-2M} n^{-\frac{1}{m_2}}$$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{ G : \lambda(G) \leq -\varepsilon \}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{ G : \begin{array}{l} \lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n \end{array} \right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{ F \subseteq G(n,p) \} \right)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-\varepsilon}$
- $F \in \mathcal{I}_2$

$$\mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{v(F)} p^{e(F)} \leq 2^{-2M e(F)} n^{\lambda(F)} \leq n^{-2M} \cdot n^{M} \leq n^{-M}$$

$$p = 2^{-2M} n^{-\frac{1}{m_2}}$$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \leq -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M, n) = \left\{G : \begin{array}{l}\lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n\end{array}\right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}\big(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)\big) \leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{F \subseteq G(n,p)\}\Big)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-\varepsilon}$
- $F \in \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-M}$

Prova do 0-statement:

$$\lambda(G) = v(G) - \frac{e(G)}{m_2}$$

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \{G : \lambda(G) \leq -\varepsilon\}$$

$$\mathcal{J}_2(M,n) = \left\{G : \begin{array}{l}\lambda(G) \leq M, \\ e(G) > \log n\end{array}\right\}$$

$f : \mathcal{R}_n \to \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ tal que

- $f(G) \subseteq G$
- $|f(\mathcal{R}_n)| \leq (\log n)^M$

Seja $\mathcal{I}_1 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_1$ e $\mathcal{I}_2 := f(\mathcal{R}_n) \cap \mathcal{J}_2$

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} \{F \subseteq G(n,p)\}\right)$$

- $F \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-\varepsilon}$
- $F \in \mathcal{I}_2 \Rightarrow \mathbb{P}(F \subseteq G(n,p)) \leq n^{-M}$

Temos:

$$\mathbb{P}(G(n,p) \to (K_r, C_\ell)) \leq (n^{-M} + n^{-\varepsilon})(\log n)^M \longrightarrow 0$$

$\blacksquare$

Lema (Liebenau, M., Mendonça, Skokan '21+) $r, \ell \geq 4$

Se $G \to (K_r, C_\ell)$, então existe $H \subseteq G$ tal que

$$\frac{e(H)}{v(H)} > m_2(K_r, C_\ell) + \varepsilon$$

Lema (Liebenau, M., Mendonça, Skokan '21+) $r, \ell \geq 4$

Se $G \to (K_r, C_\ell)$, então existe $H \subseteq G$ tal que

$$\frac{e(H)}{v(H)} > m_2(K_r, C_\ell) + \varepsilon$$

Em particular,

$$\mathbb{P}(G \subseteq G(n,p)) \leq n^{v(H)} p^{e(H)} \leq \left(np^{e(H)/v(H)}\right)^{v(H)}$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad p < c\, n^{\frac{-1}{m_2(K_r, C_\ell)}}$$

É útil usar a linguagem de hipergrafos:

É útil usar a linguagem de hipergrafos:

$$\mathcal{G}(H) = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$$

$= E(H)$

↳ cópias de K_r e C_ℓ em H

É útil usar a linguagem de hipergrafos:

$$\mathcal{G}(H) = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$$

$= E(H)$

$\hookrightarrow$ cópias de K_r e C_ℓ em H

$$H \to (K_r, C_\ell) \iff \mathcal{G}(H) \to (K_r, C_\ell)$$

É útil usar a linguagem de hipergrafos:

$$\mathcal{G}(H) = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$$

$= E(H)$

↳ cópias de K_r e C_ℓ em H

$$H \to (K_r, C_\ell) \iff \mathcal{G}(H) \to (K_r, C_\ell)$$

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal.

É útil usar a linguagem de hipergrafos:

$$\mathcal{G}(H) = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$$

$= E(H)$

cópias de K_r e C_ℓ em H

$$H \to (K_r, C_\ell) \iff \mathcal{G}(H) \to (K_r, C_\ell)$$

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal. Isto é,

$\mathcal{H} \to (K_r, C_\ell)$ e $\mathcal{H} \setminus \{E\} \not\to (K_r, C_\ell)$ $\forall\, E \in \mathcal{H}$.

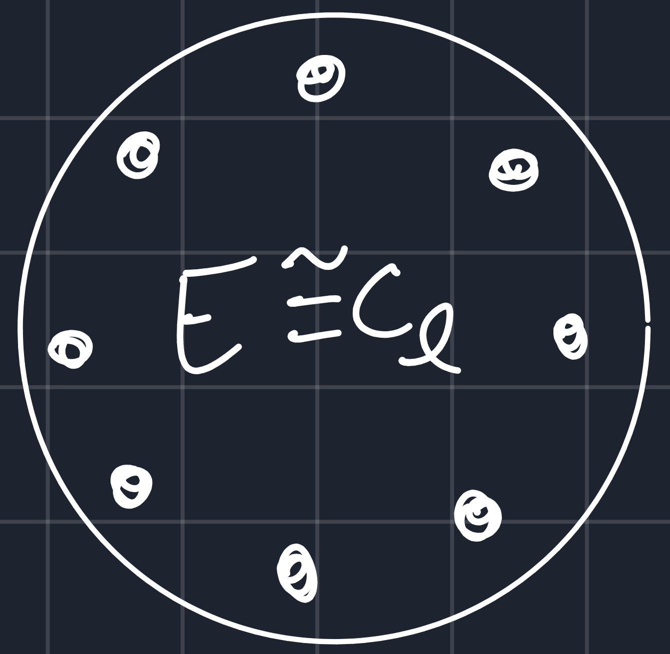
Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal e $E \in \mathcal{H}$.

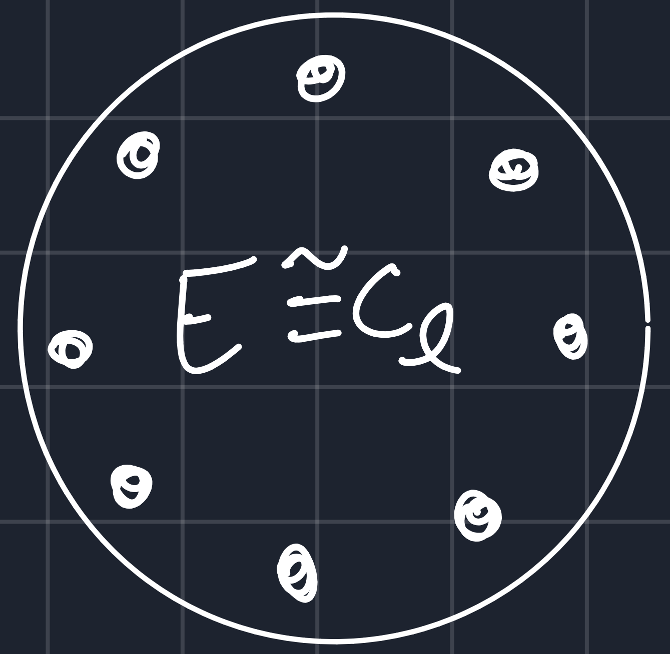
Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal e $E \in \mathcal{H}$.



Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal e $E \in \mathcal{H}$.

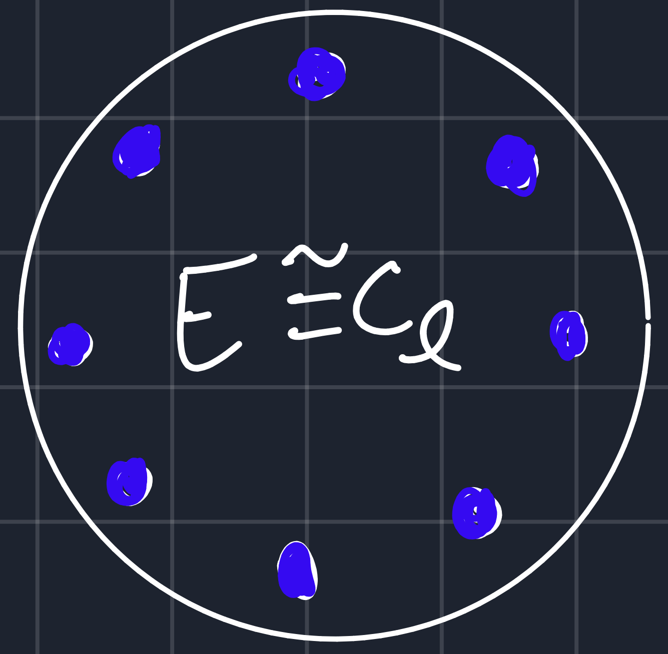


$$\mathcal{H} \setminus E \not\to (K_r, C_\ell) \quad \text{mas}$$

$$\mathcal{H} \to (K_r, C_\ell)$$

Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal e $E \in \mathcal{H}$.



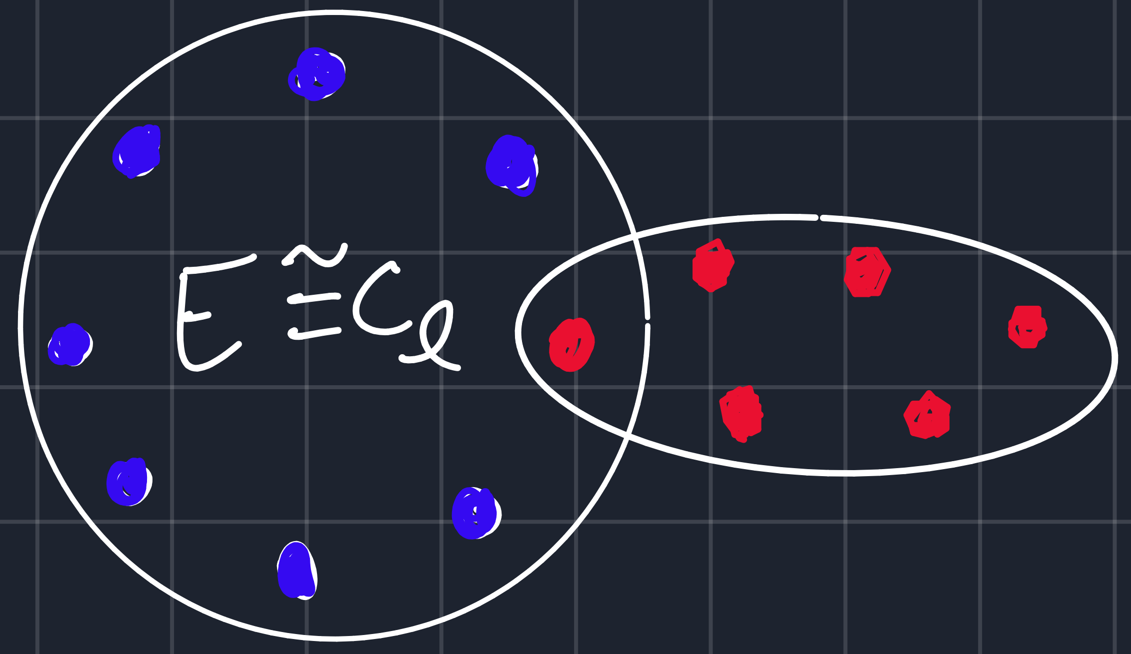
$\mathcal{H} \setminus E \nrightarrow (K_r, C_\ell)$ mas

$\mathcal{H} \rightarrow (K_r, C_\ell)$

$\Rightarrow \exists$ uma coloração onde E é a única 'monocromática'

Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal e $E \in \mathcal{H}$.



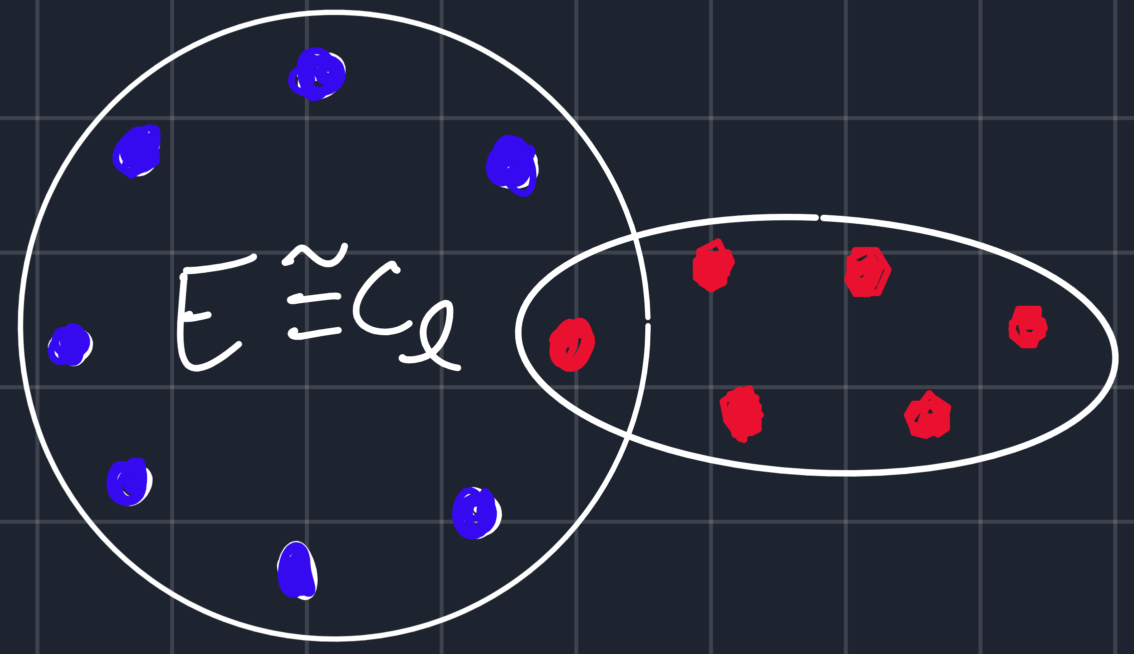
$\mathcal{H} \setminus E \not\to (K_r, C_\ell)$ mas

$\mathcal{H} \to (K_r, C_\ell)$

$\Longrightarrow \exists$ uma coloração onde E é a única 'monocromática'

Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal e $E \in \mathcal{H}$.



$\Rightarrow$ Para todo $e \in E$ existe $K \cong K_r$ tal que $E(K) \cap E = \{e\}$

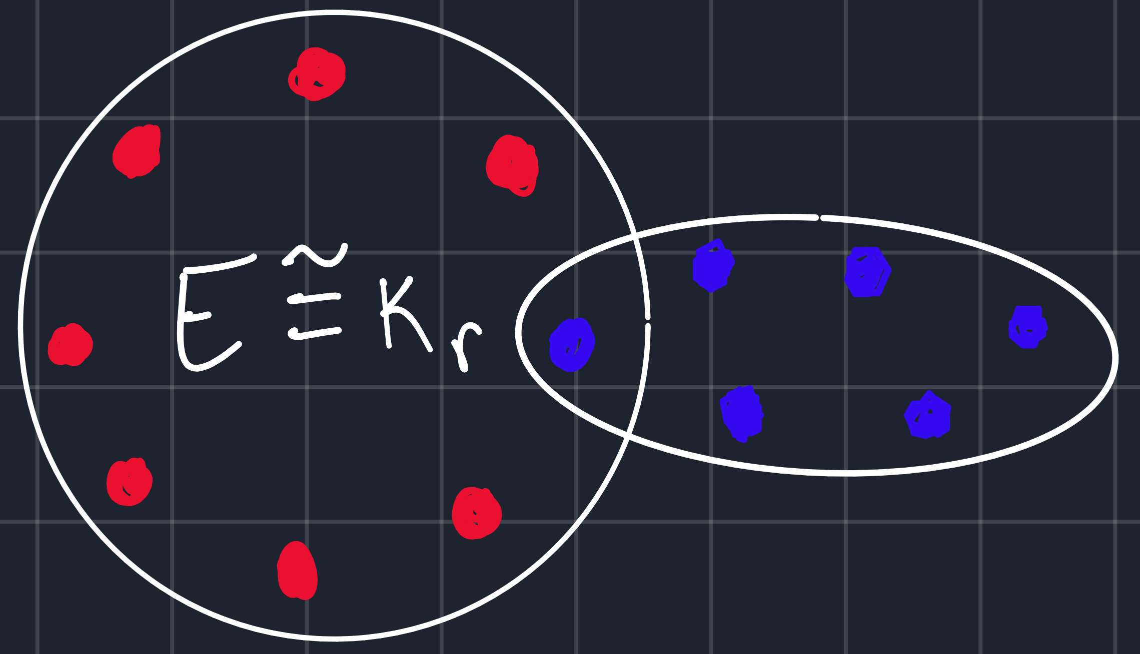
$\mathcal{H} \setminus E \nrightarrow (K_r, C_\ell)$ mas

$\mathcal{H} \rightarrow (K_r, C_\ell)$

$\Rightarrow \exists$ uma coloração onde E é a única 'monocromática'

Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal e $E \in \mathcal{H}$.



$\Rightarrow$ Para todo $e \in E$ existe $C \cong C_\ell$ tal que $E(K) \cap E = \{e\}$

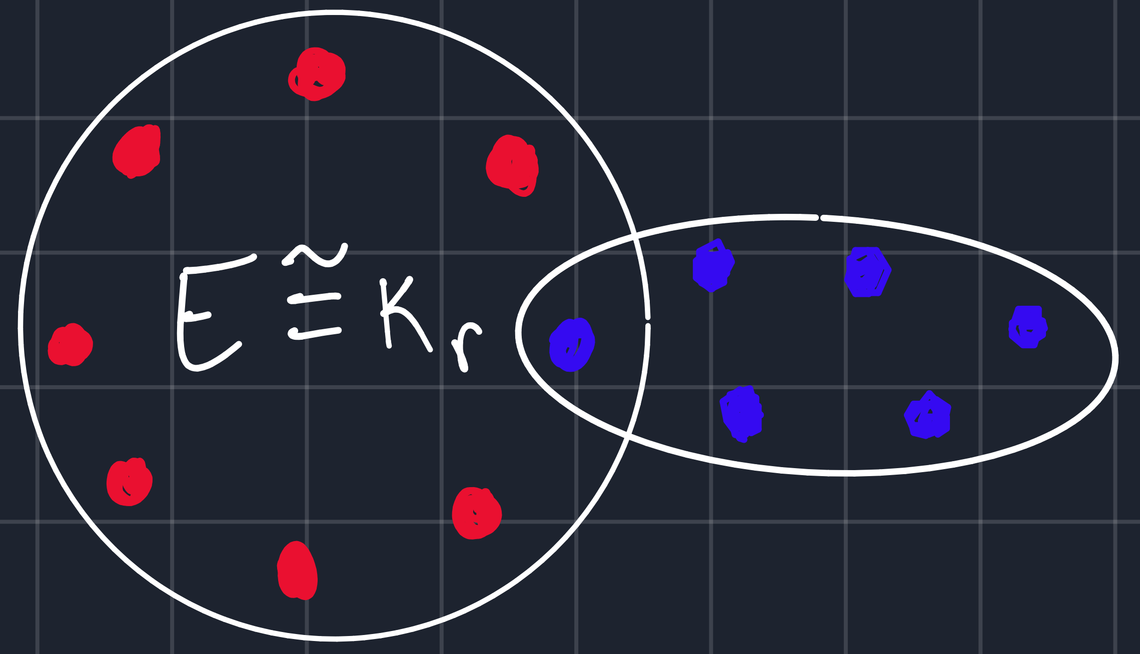
$\mathcal{H} \setminus E \nrightarrow (K_r, C_\ell)$ mas

$\mathcal{H} \rightarrow (K_r, C_\ell)$

$\Rightarrow \exists$ uma coloração onde E é a única 'monocromática'

Qual a vantagem em lidar com hipergrafos Ramsey minimais?

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal e $E \in \mathcal{H}$.



$\Rightarrow$ Para todo $e \in E$ existe $C \cong C_\ell$ tal que $E(K) \cap E = \{e\}$

Essa propriedade é chamada de $*$-crítica.

$\mathcal{H} \setminus E \nrightarrow (K_r, C_\ell)$ mas

$\mathcal{H} \rightarrow (K_r, C_\ell)$

$\Rightarrow \exists$ uma coloração onde E é a única 'monocromática'

Suponha que $H \to (K_r, C_\ell)$.

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal.

Seja $G(\mathcal{H})$ o subgrafo de H gerado por $E(\mathcal{H})$

Suponha que $H \to (K_r, C_\ell)$.

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal.

Seja $G(\mathcal{H})$ o subgrafo de H gerado por $E(\mathcal{H})$

Lema: $\dfrac{e(G(\mathcal{H}))}{v(G(\mathcal{H}))} > m_2(K_r, C_\ell) + \varepsilon$

Suponha que $H \to (K_r, C_\ell)$.

Seja $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey minimal.

Seja $G(\mathcal{H})$ o subgrafo de H gerado por $E(\mathcal{H})$

Lema: $$\frac{e(G(\mathcal{H}))}{v(G(\mathcal{H}))} > m_2(K_r, C_\ell) + \varepsilon$$

Prova: Parte I: Mostrar que $\{v : d(v) = r\}$ é independente usando a prop. $*$-crítica de $\mathcal{H}$.

Parte II: Cotar a densidade de $G(\mathcal{H})$ usando Parte I

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

▷ $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

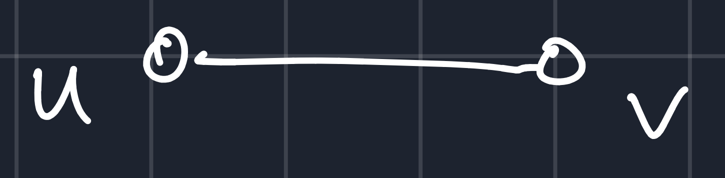
$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

▶ $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

Suponha que não:

$d(u) = d(v) = r$



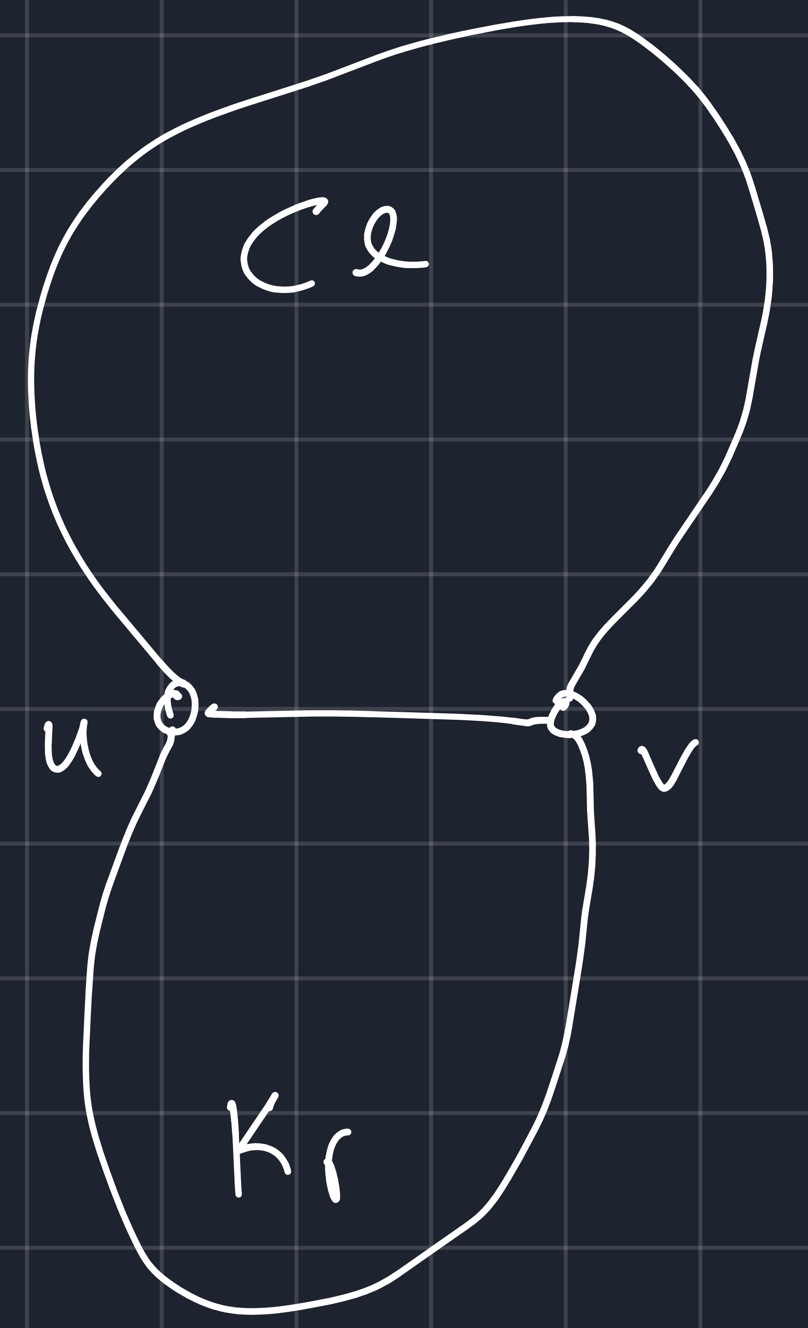
$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

- $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

Suponha que não:

$d(u) = d(v) = r$



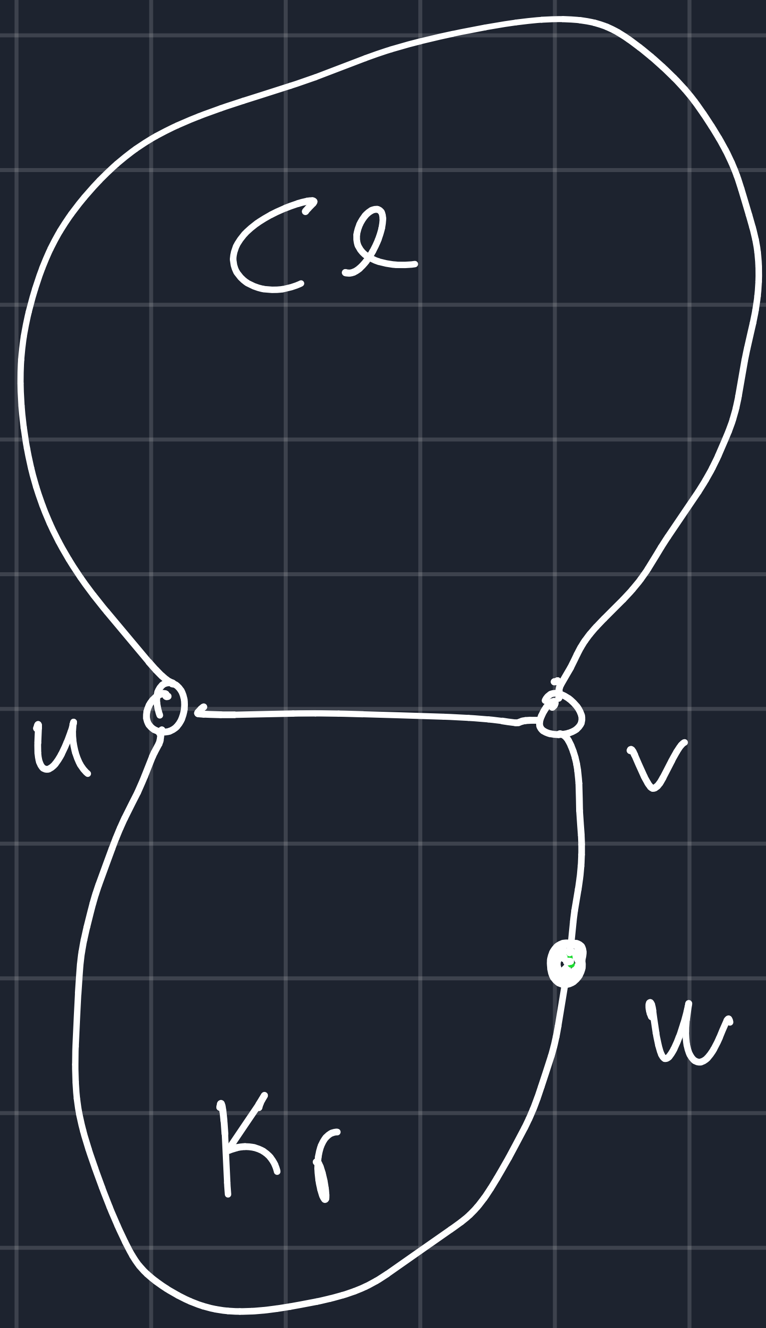
$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

- $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

Suponha que não:

$d(u) = d(v) = r$



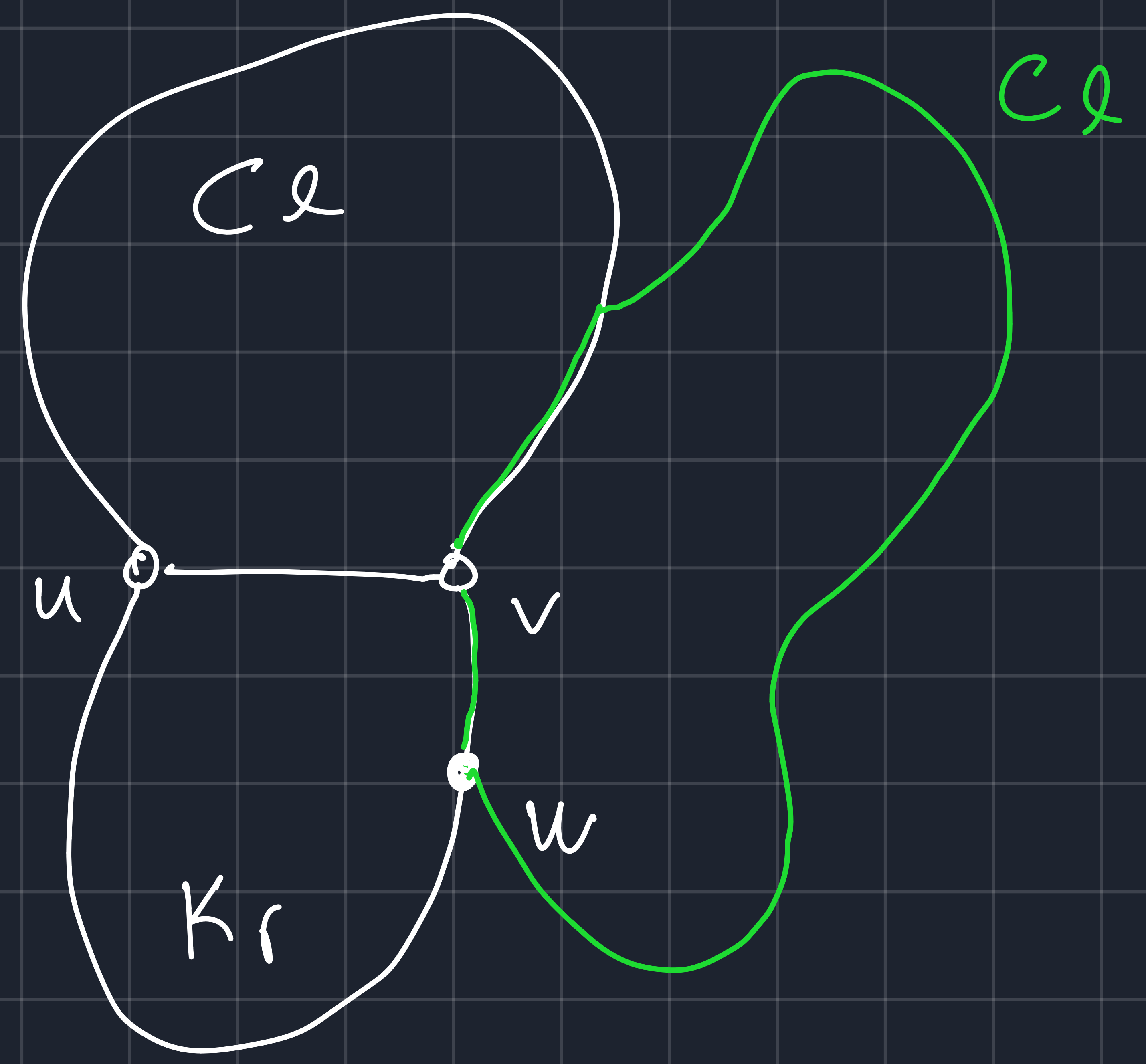
$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

▶ $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

Suponha que não:

$d(u) = d(v) = r$



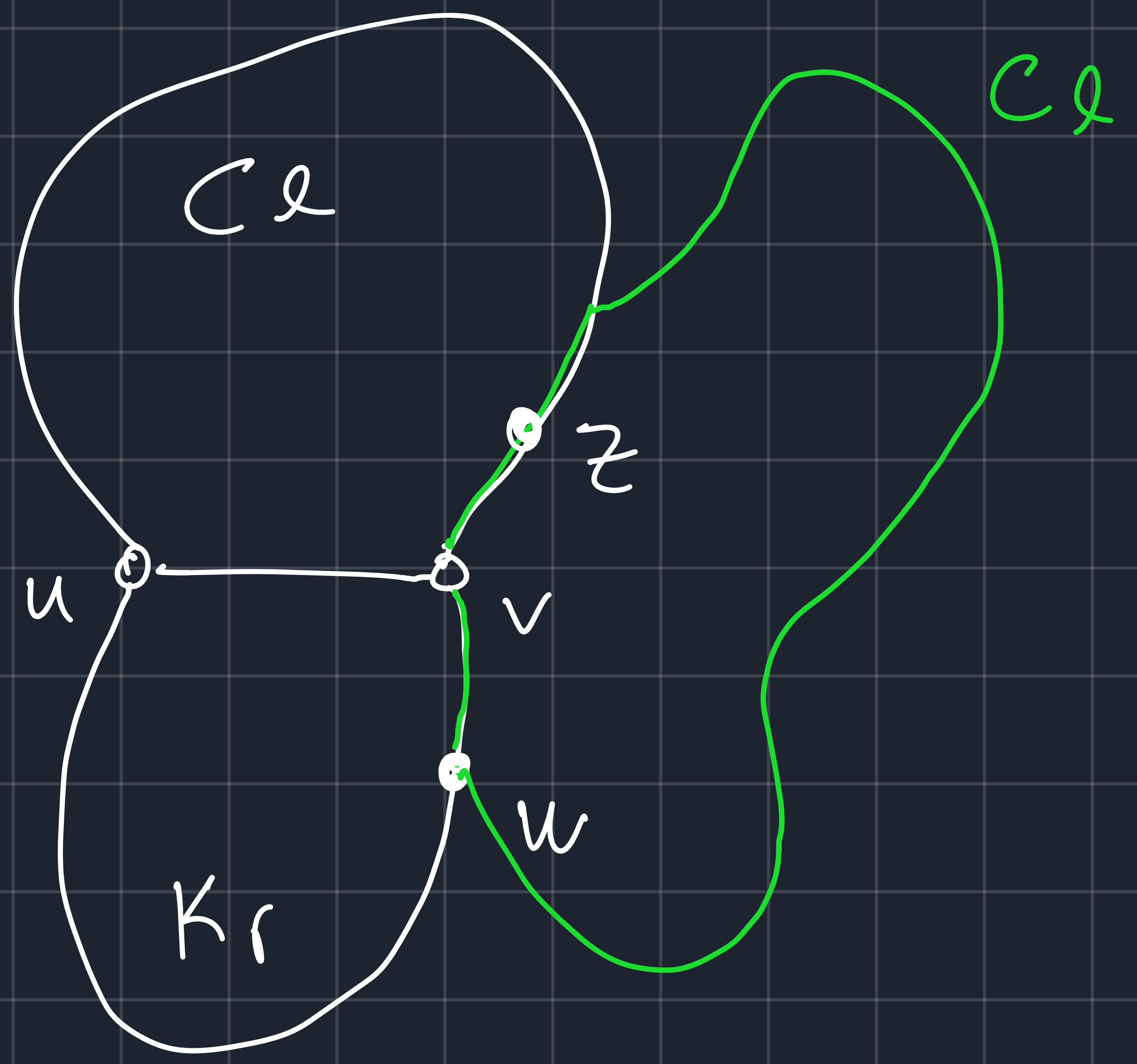
$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

▶ $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

Suponha que não:

$d(u) = d(v) = r$



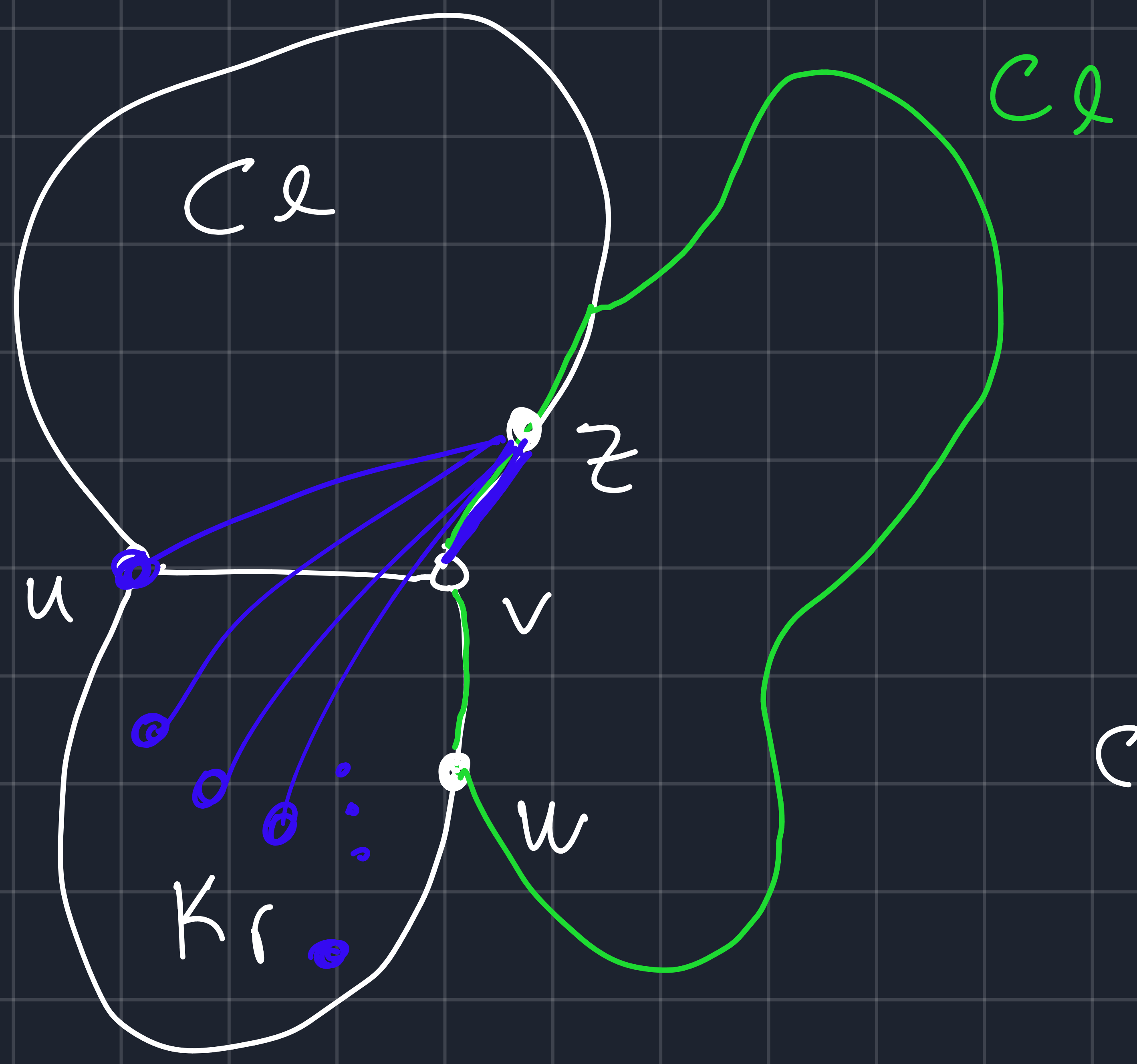
$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

▷ $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

Suponha que não:

$d(u) = d(v) = r$



contradição!

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema</u>:

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

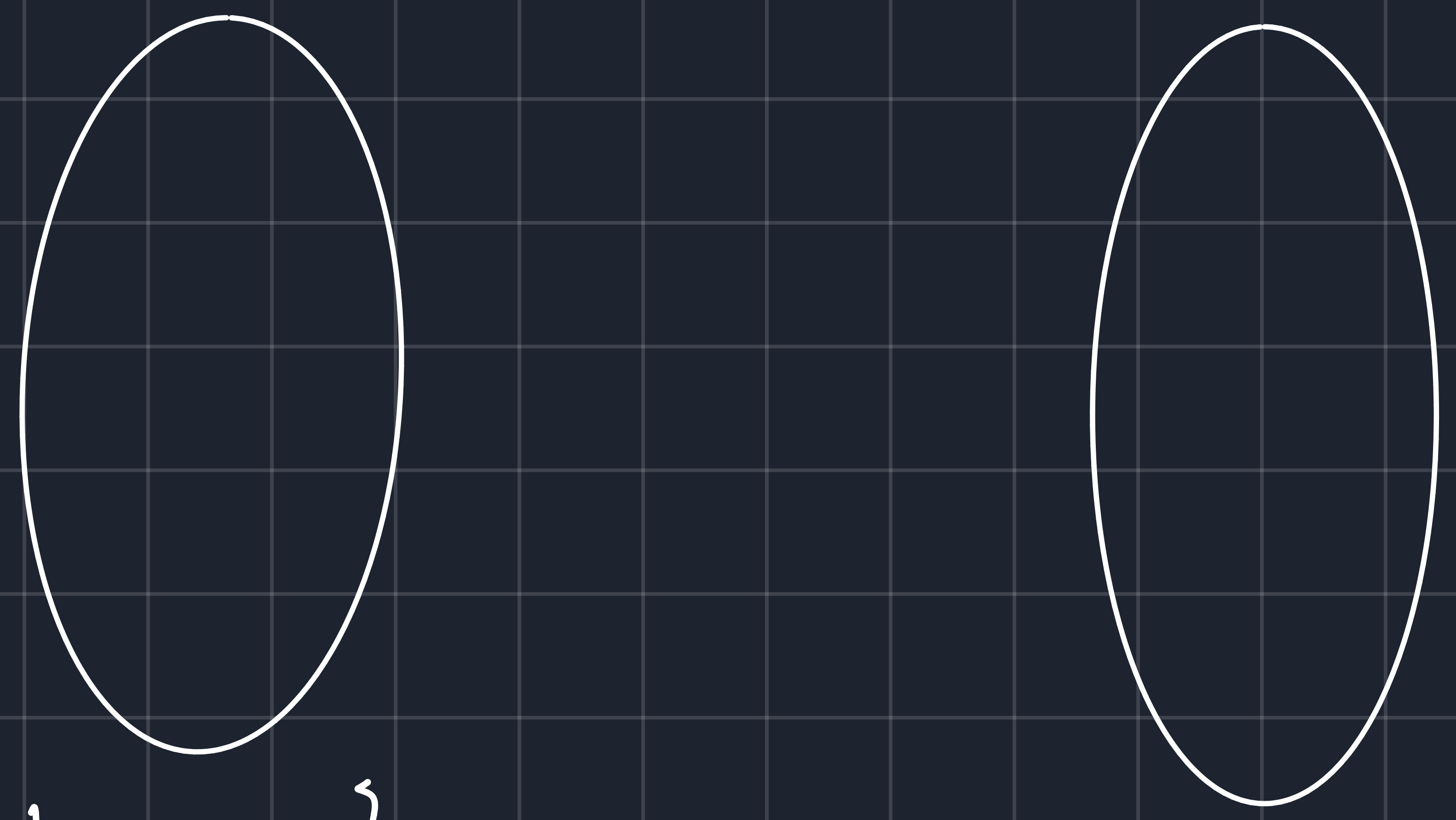
(II) Usando (I) para cotar a densidade:

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) Usando (I) para cotar a densidade:



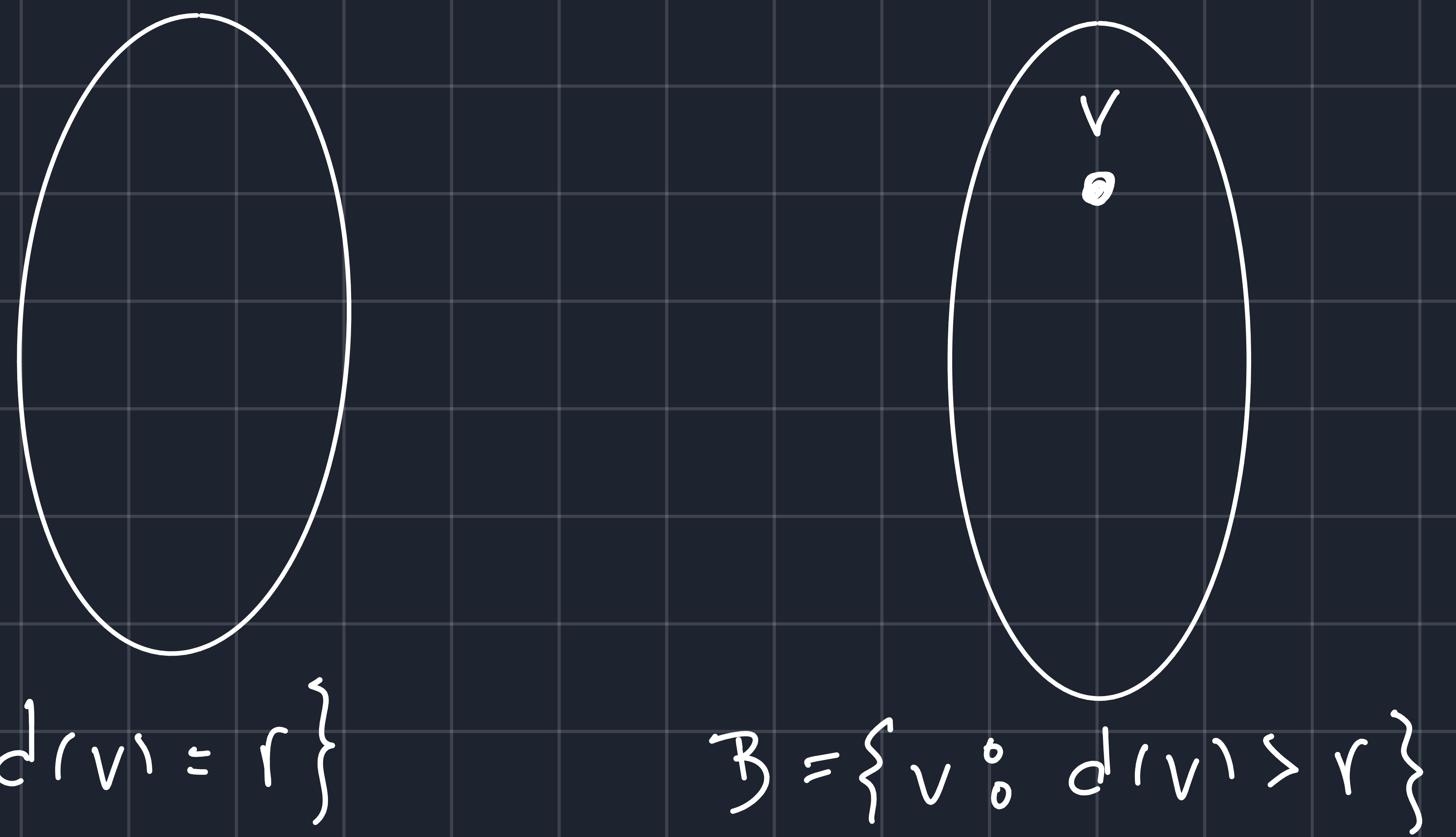
$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad$ $B = \{v : d(v) > r\}$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) Usando (I) para cotar a densidade:

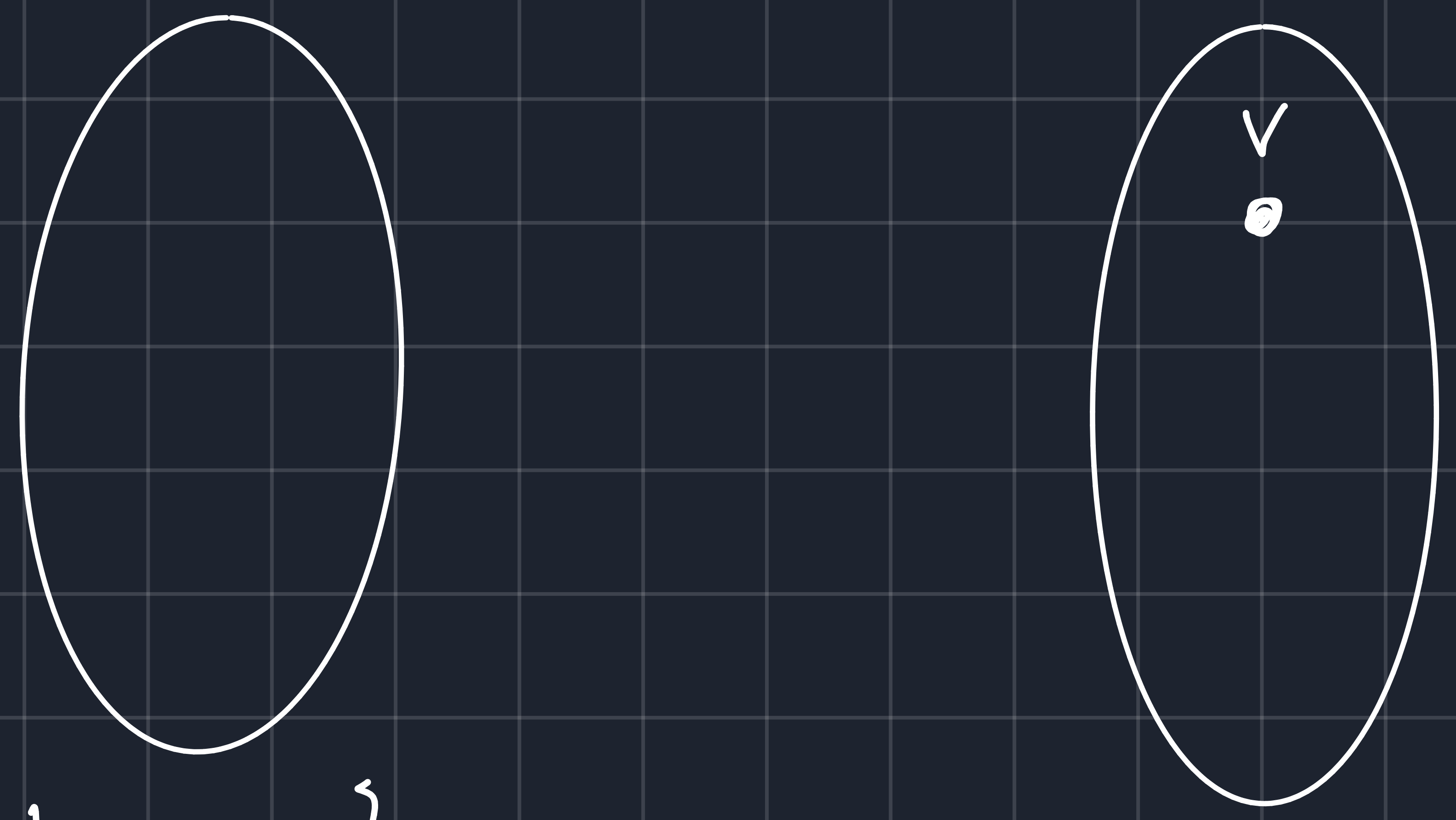


$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) Usando (I) para cotar a densidade:



ou $d_B(v) = d(v) > r$

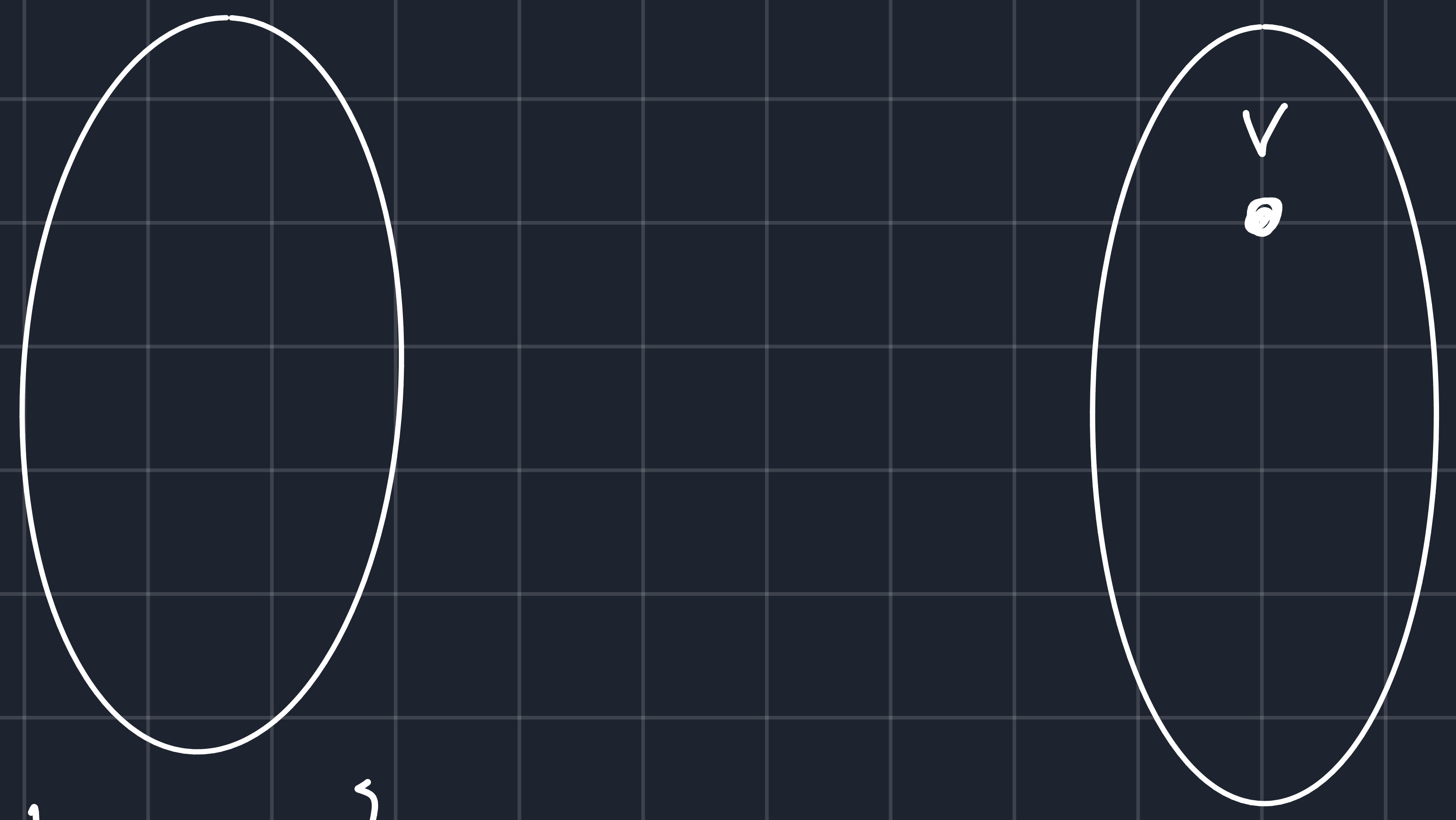
$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad$ $B = \{v : d(v) > r\}$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) Usando (I) para cotar a densidade:



$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad$ $B = \{v : d(v) > r\}$

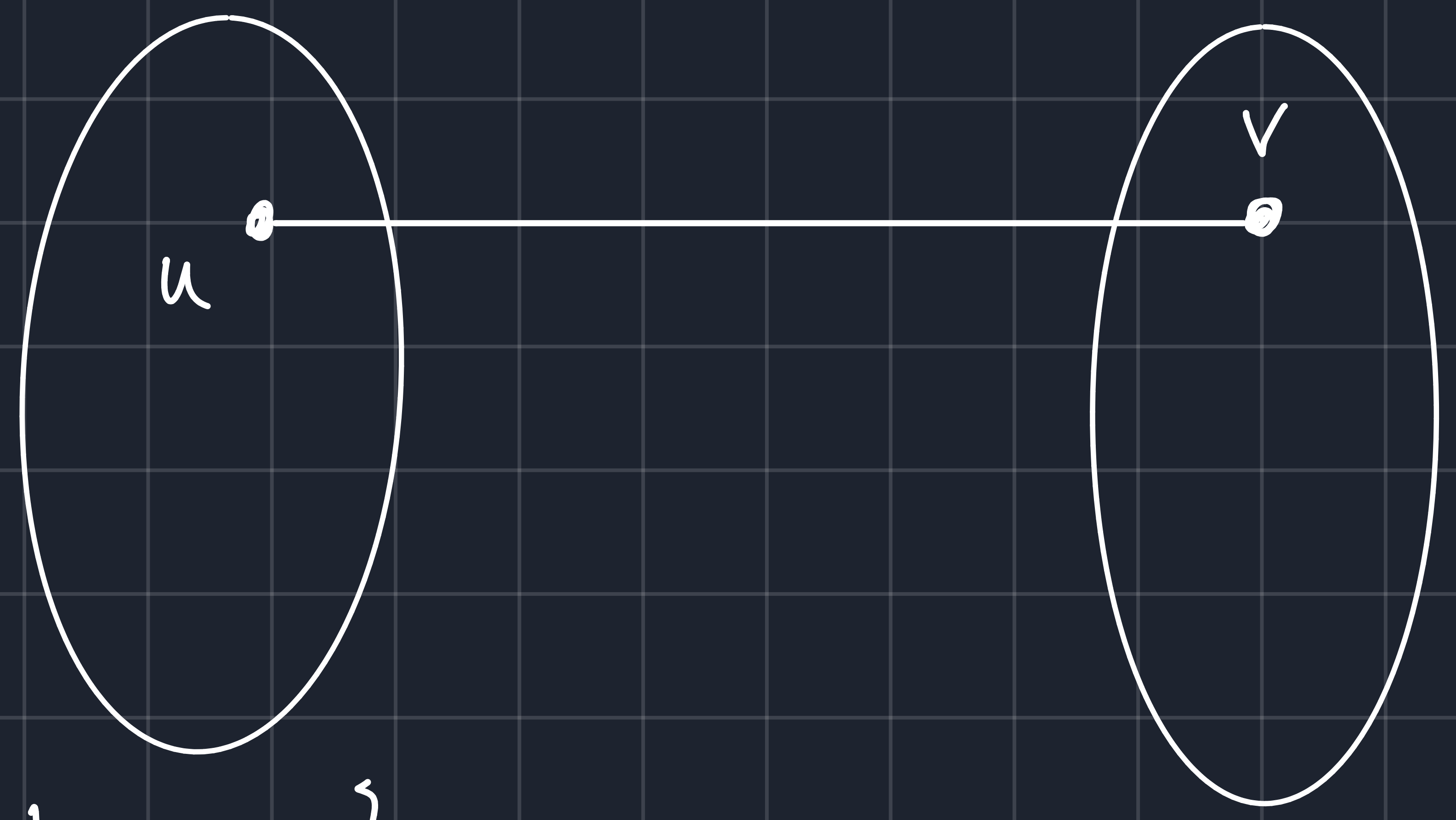
- ou $d_B(v) = d(v) > r$
- ou existe $\{u, v\} \in E(G)$ com $u \in A$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

Ⓘ $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

Ⓘⓘ Usando Ⓘ para cotar a densidade:



$A = \{v : d(v) = r\}$ $B = \{v : d(v) > r\}$

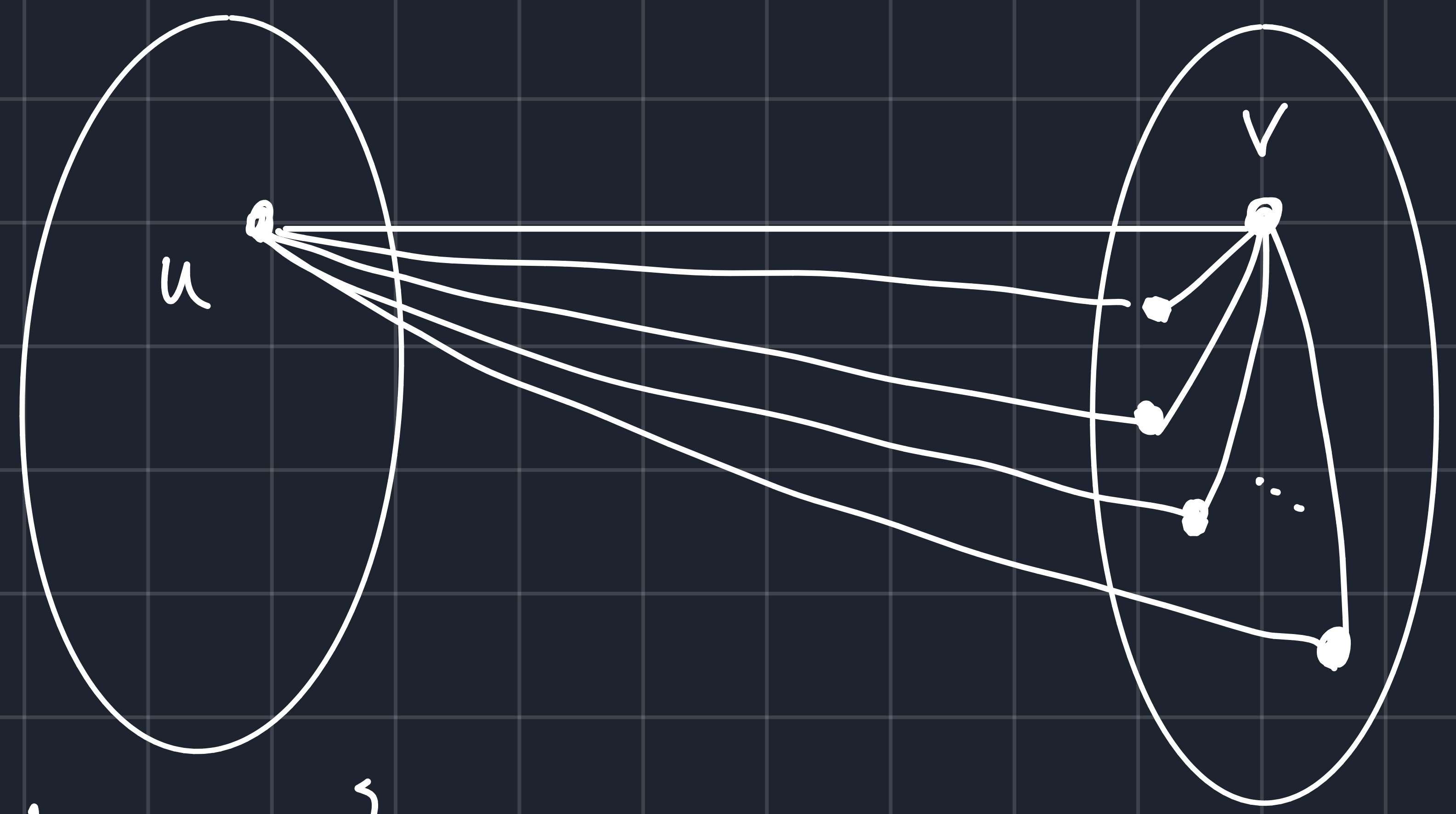
- ou $d_B(v) = d(v) > r$
- ou existe $\{u, v\} \in E(G)$ com $u \in A$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema</u>:

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) Usando (I) para cotar a densidade:



$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad$ $B = \{v : d(v) > r\}$

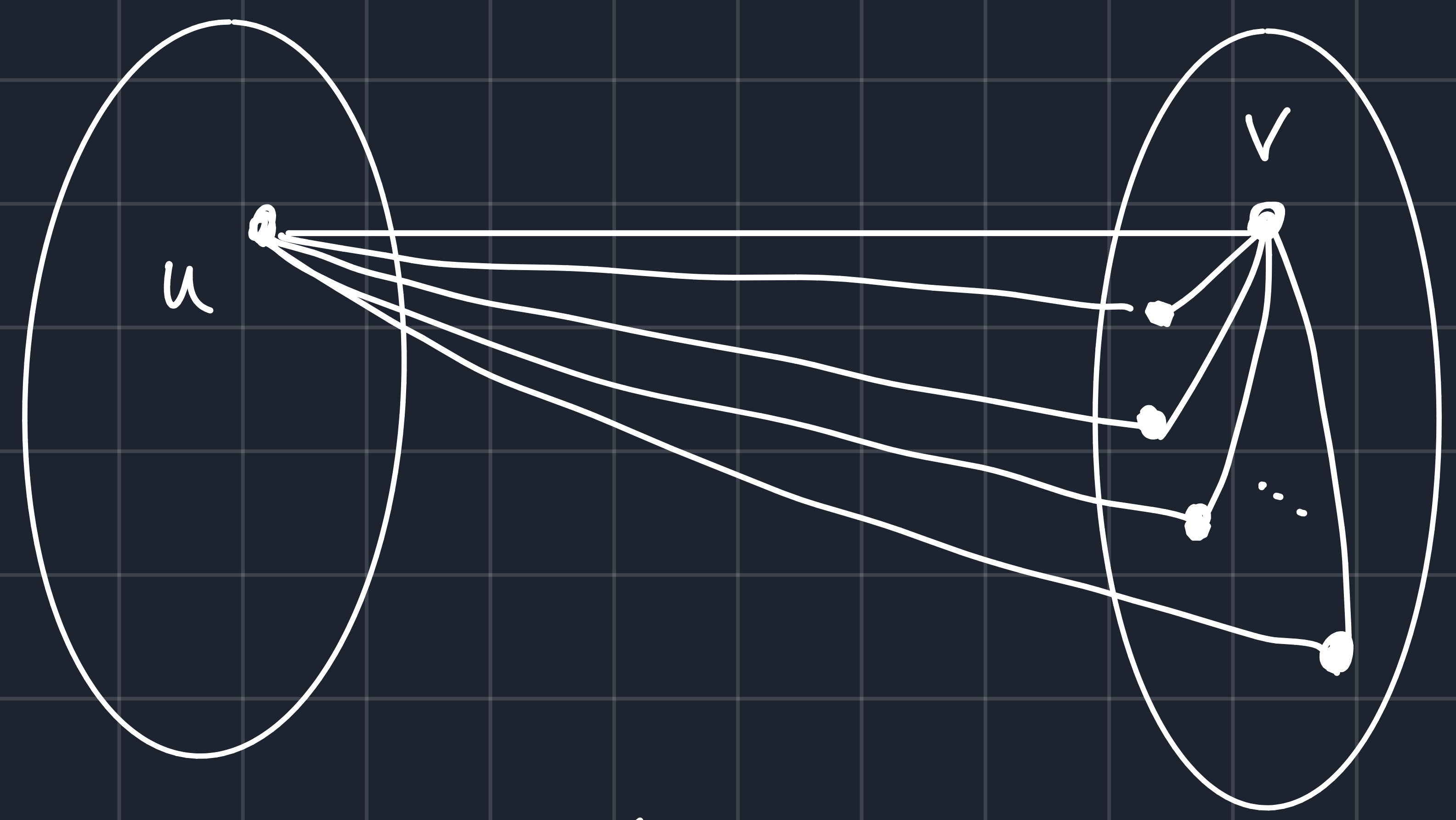
- ou $d_B(v) = d(v) > r$
- ou existe $\{u, v\} \in E(G)$ com $u \in A$ $\Rightarrow d_B(v) \geq r - 2$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

Prova do lema:

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) $d_B(v) \geq r-2 \quad \forall v$



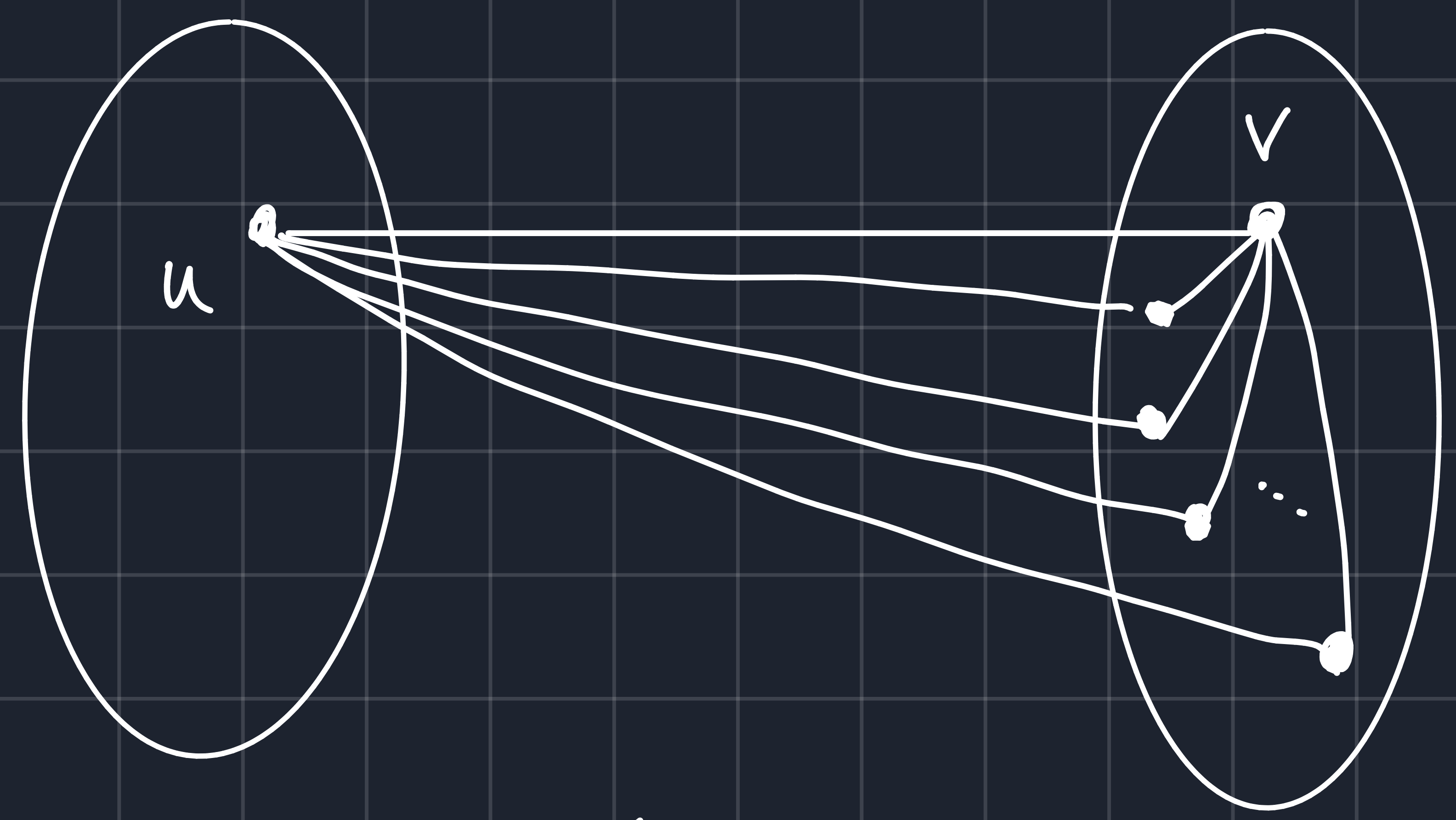
$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad B = \{v : d(v) > r\}$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) $d_B(v) \geq r-2 \quad \forall v$



$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad B = \{v : d(v) > r\}$

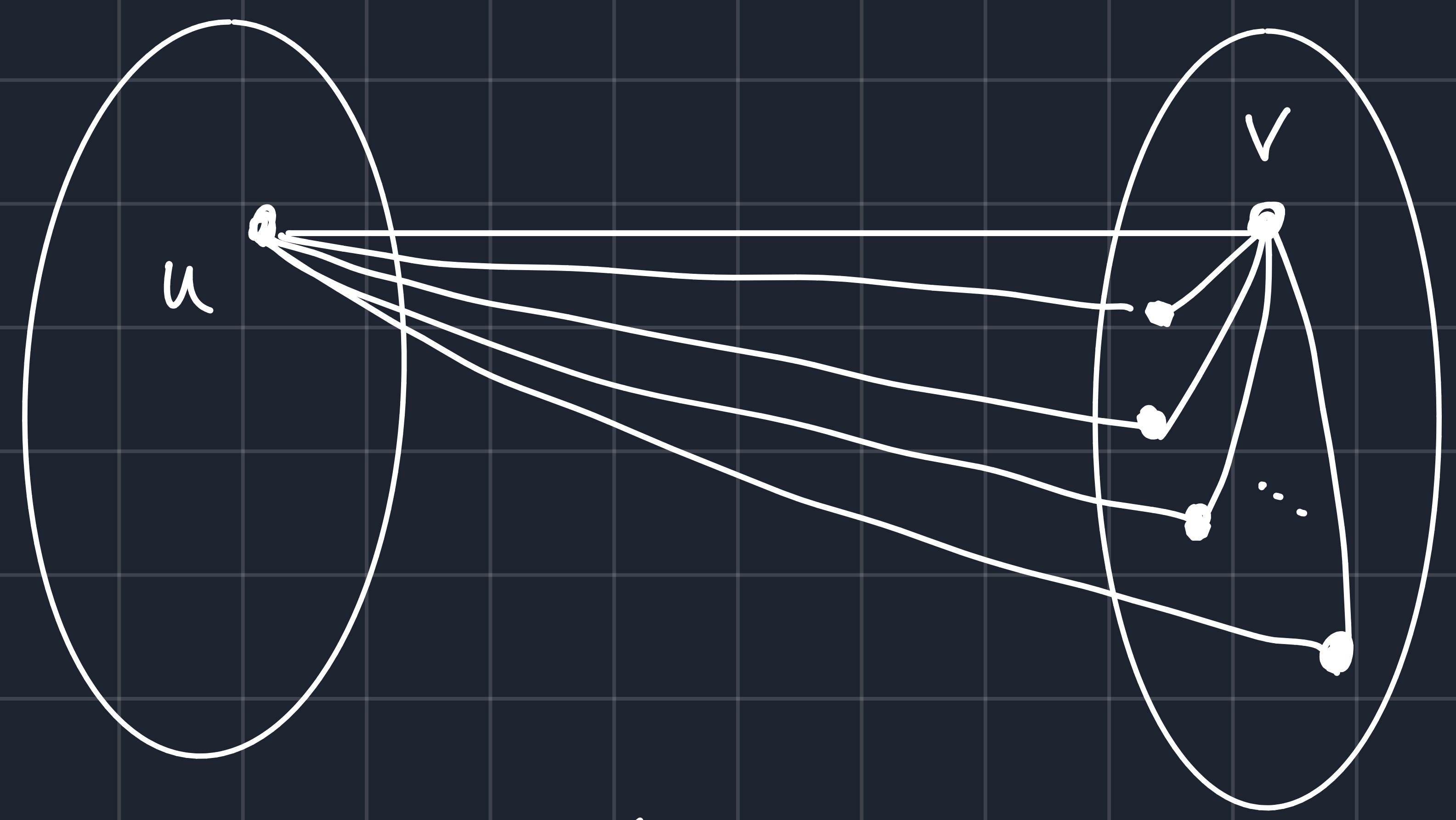
$$2e(G) \geq r \cdot |A| + \sum_{v \in B} d(v)$$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) $d_B(v) \geq r-2 \quad \forall v$



$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad$ $B = \{v : d(v) > r\}$

$$2e(G) \geq r \cdot |A| + \sum_{v \in B} d(v)$$

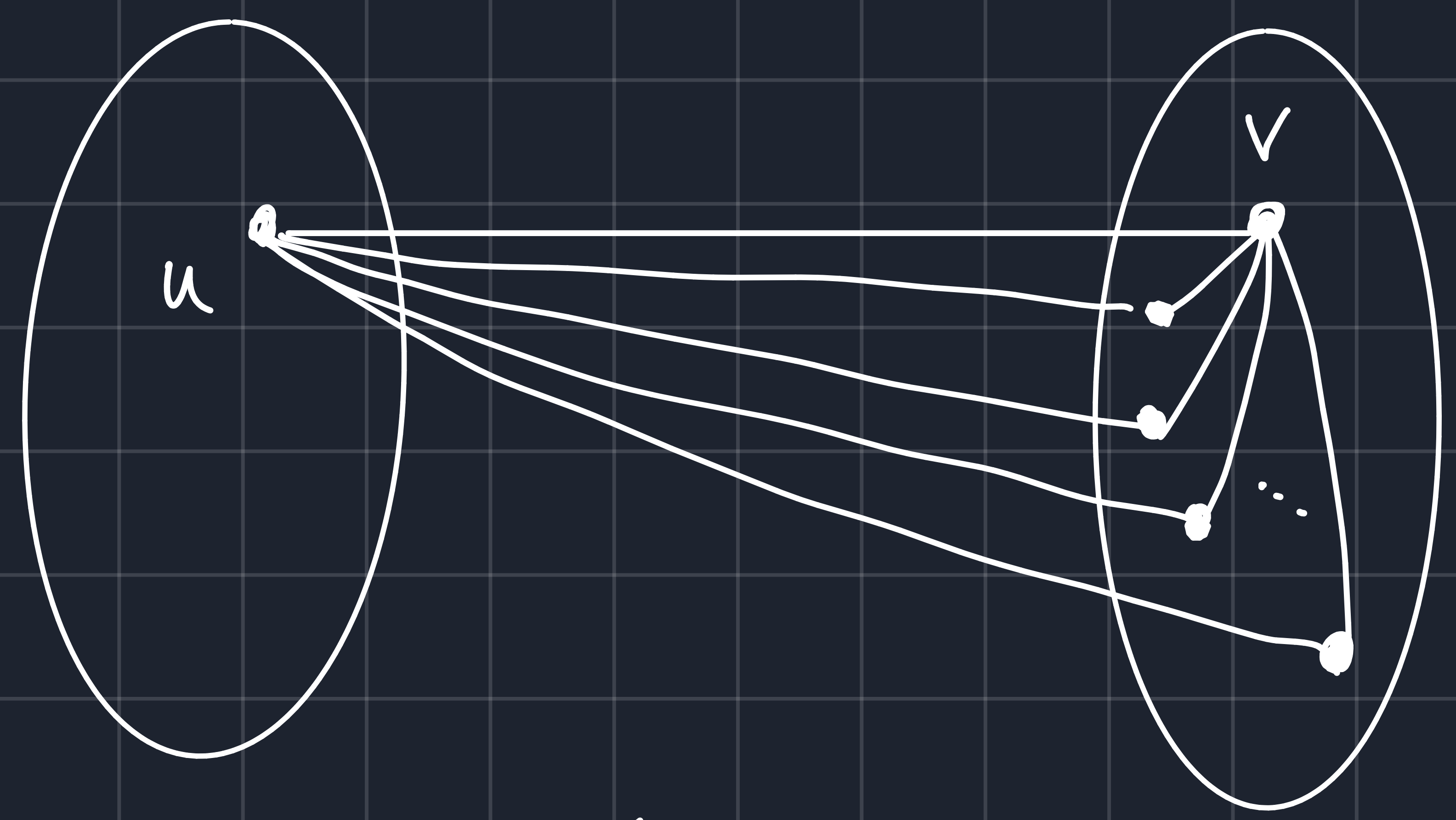
$$\geq 2r|A| + (r-2)|B|$$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) $d_B(v) \geq r-2 \quad \forall v$



$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad B = \{v : d(v) > r\}$

$$2e(G) \geq r \cdot |A| + \sum_{v \in B} d(v)$$

$$\geq 2r|A| + (r-2)|B|$$

e

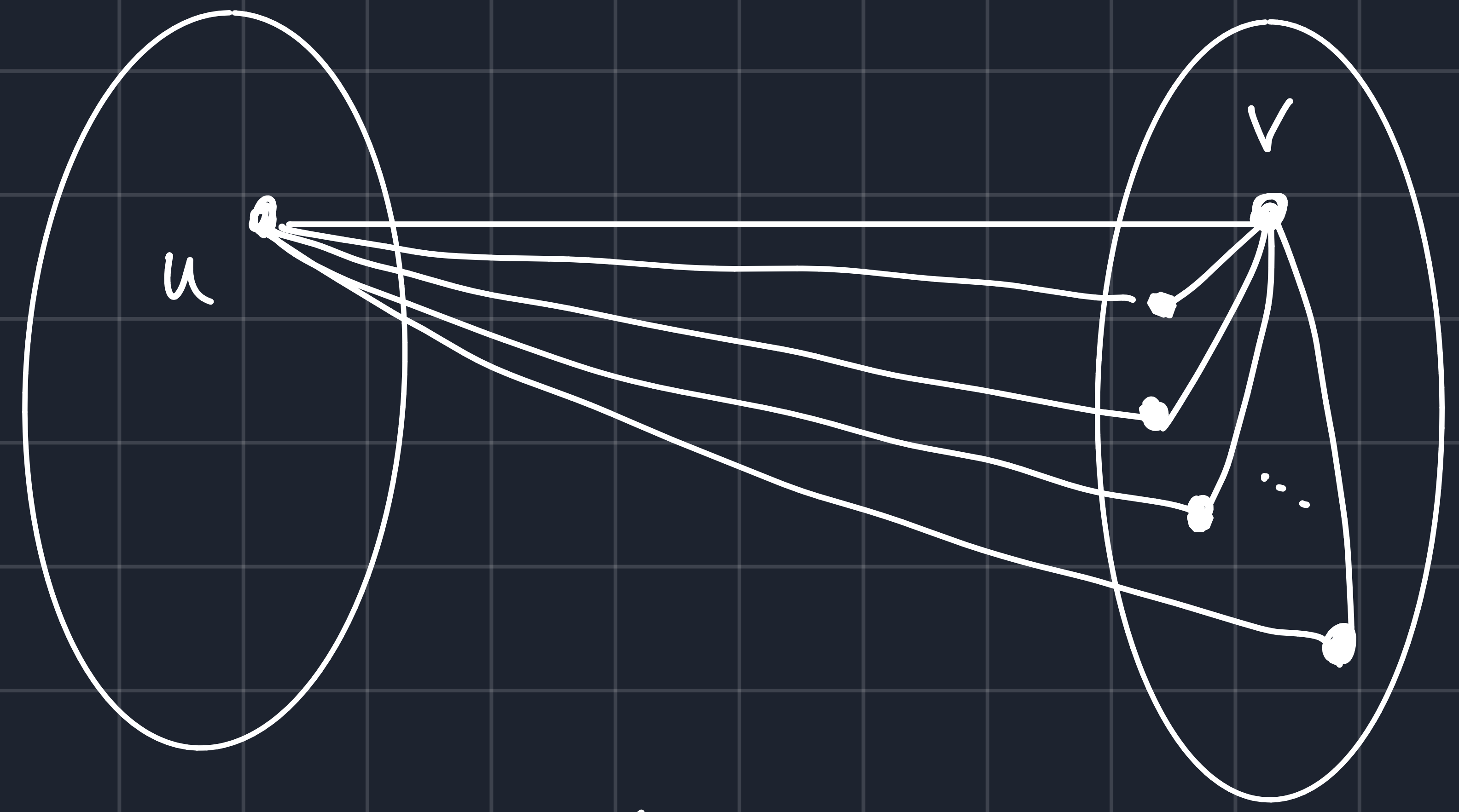
$$2e(G) \geq r|A| + (r+1)|B|$$

$H \to (K_r, C_\ell)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(H)$ Ramsey min. e $G = G(\mathcal{H})$

<u>Prova do lema:</u>

(I) $\{v \in V(G) : d(v) = r\}$ é independente

(II) $d_B(v) \geq r-2 \quad \forall v$



$A = \{v : d(v) = r\}$ $\quad B = \{v : d(v) > r\}$

$$2e(G) \geq r \cdot |A| + \sum_{v \in B} d(v)$$

$$\geq 2r|A| + (r-2)|B|$$

e

$$2e(G) \geq r|A| + (r+1)|B|$$

Maximizando, obtemos $\frac{e(G)}{v(G)} > \varepsilon + m_2$ ☒

Obrigada!