Concentração de massa no modelo parabólico de Anderson

Renato Soares dos Santos

UFMG

COLMEA - 24 de setembro de 2020

O modelo parabólico de Anderson (PAM)

O modelo parabólico de Anderson (PAM)

Solução positiva para o problema de Cauchy:

O modelo parabólico de Anderson (PAM)

Solução positiva para o problema de Cauchy:

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) &= \Delta u(t,x) + \xi(x) u(t,x), && t > 0, x \in \mathbb{Z}^d, \\
u(0,x) &= \mathbb{1}_0(x), && x \in \mathbb{Z}^d.
\end{aligned}
$$

O modelo parabólico de Anderson (PAM)

Solução positiva para o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \Delta u(t,x) + \xi(x) u(t,x), \quad && t > 0, x \in \mathbb{Z}^d, \\ u(0,x) &= \mathbb{1}_0(x), && x \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

$\xi = (\xi(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ i.i.d.,

O modelo parabólico de Anderson (PAM)

Solução positiva para o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \Delta u(t,x) + \xi(x)u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{Z}^d, \\ u(0,x) &= \mathbb{1}_0(x), & x \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

$$\xi = (\xi(x))_{x \in \mathbb{Z}^d} \text{ i.i.d.,} \qquad \Delta f(x) = \sum_{y \sim x} f(y) - f(x).$$

O modelo parabólico de Anderson (PAM)

Solução positiva para o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \Delta u(t,x) + \xi(x) u(t,x), \quad && t > 0, x \in \mathbb{Z}^d, \\ u(0,x) &= \mathbb{1}_0(x), && x \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

$$\xi = (\xi(x))_{x \in \mathbb{Z}^d} \text{ i.i.d.}, \qquad \Delta f(x) = \sum_{y \sim x} f(y) - f(x).$$

$$\Delta + \xi \quad \text{operador de Anderson.}$$

Um modelo populacional

Sistema de partículas:

1. Uma única partícula no tempo $t = 0$, situada na origem;

Um modelo populacional

Sistema de partículas:

1. Uma única partícula no tempo $t = 0$, situada na origem;
2. independentemente, cada partícula localizada em $x \in \mathbb{Z}^d$:
   - dá origem a uma nova partícula com taxa $\xi(x)^+$;
   - desaparece com taxa $\xi(x)^-$;
   - se move para $y \sim x$ com taxa 1.

Um modelo populacional

Sistema de partículas:

1. Uma única partícula no tempo $t = 0$, situada na origem;
2. independentemente, cada partícula localizada em $x \in \mathbb{Z}^d$:
   - dá origem a uma nova partícula com taxa $\xi(x)^+$;
   - desaparece com taxa $\xi(x)^-$;
   - se move para $y \sim x$ com taxa 1.

$$u(t, x) = E[\text{número de partículas presentes em } (x, t)].$$

Um modelo populacional

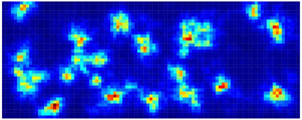
Sistema de partículas:

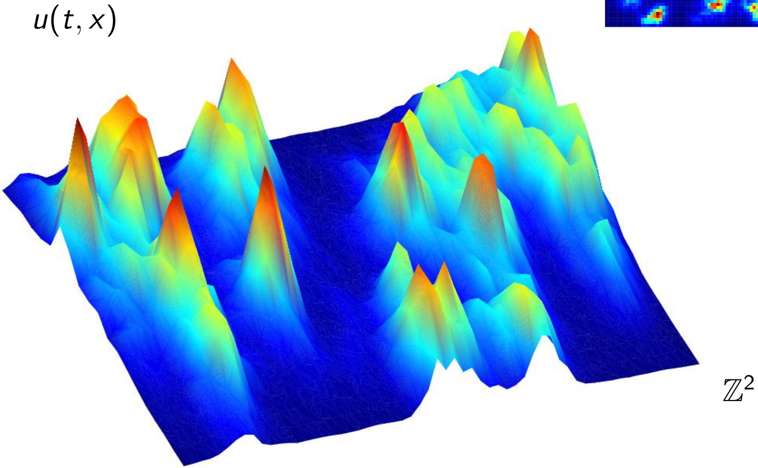
1. Uma única partícula no tempo $t = 0$, situada na origem;
2. independentemente, cada partícula localizada em $x \in \mathbb{Z}^d$:
   - dá origem a uma nova partícula com taxa $\xi(x)^+$;
   - desaparece com taxa $\xi(x)^-$;
   - se move para $y \sim x$ com taxa 1.

$$u(t, x) = E[\text{número de partículas presentes em } (x, t)].$$

Interpretação: $\mathbb{Z}^d$ espaço de fenótipos, $\xi(x)$ aptidão do fenótipo x, movimento representa mutação.

Intermitência





Intermitência em termos de momentos

$$U(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} u(t, z) \quad \text{massa total.}$$

Intermitência em termos de momentos

$$U(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} u(t, z) \quad \text{massa total.}$$

Gärtner-Molchanov '90: intermitência via $\|U(t)\|_p$.

Intermitência em termos de momentos

$$U(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} u(t, z) \quad \text{massa total.}$$

Gärtner-Molchanov '90: intermitência via $\|U(t)\|_p$.

Gärtner-Molchanov '98,
Biskup-König '01,
Hofstad-König-Mörters '06.

comportamento assintótico de $\log U(t)$ e $\log \|U(t)\|_p$.

Intermitência em termos de momentos

$$U(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} u(t,z) \quad \text{massa total.}$$

Gärtner-Molchanov '90: intermitência via $\|U(t)\|_p$.

Gärtner-Molchanov '98, Biskup-König '01, Hofstad-König-Mörters '06. comportamento assintótico de $\log U(t)$ e $\log \|U(t)\|_p$.

Caudas duplamente exponenciais:

$$\mathrm{Prob}(\xi(0) > u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{u/\varrho}}, \qquad \varrho \in (0,\infty).$$

Caudas duplamente exponenciais

Gärtner-König-Molchanov '07 (caudas DE):

Caudas duplamente exponenciais

Gärtner-König-Molchanov '07 (caudas DE):

Existe um subconjunto aleatório $\Gamma_t \subset \mathbb{Z}^d$ com $|\Gamma_t| = t^{o(1)}$

Caudas duplamente exponenciais

Gärtner-König-Molchanov '07 (caudas DE):

Existe um subconjunto aleatório $\Gamma_t \subset \mathbb{Z}^d$ com $|\Gamma_t| = t^{o(1)}$ satisfazendo: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ R > 0$ tal que

Caudas duplamente exponenciais

Gärtner-König-Molchanov '07 (caudas DE):

Existe um subconjunto aleatório $\Gamma_t \subset \mathbb{Z}^d$ com $|\Gamma_t| = t^{o(1)}$ satisfazendo: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ R > 0$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{U(t)} \sum_{z\colon \mathrm{d}(z,\Gamma_t)\le R} u(t,z) \ge 1-\varepsilon \quad \text{quase certamente.}$$

Caudas duplamente exponenciais

Gärtner-König-Molchanov '07 (caudas DE):

Existe um subconjunto aleatório $\Gamma_t \subset \mathbb{Z}^d$ com $|\Gamma_t| = t^{o(1)}$ satisfazendo: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ R > 0$ tal que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{U(t)} \sum_{z:\ \mathrm{d}(z,\Gamma_t)\le R} u(t,z) \ge 1-\varepsilon \quad \text{quase certamente.}$$

Também: perfis de u e ξ na vizinhança de Γ_t.

Caudas pesadas

Pareto: $\quad \mathrm{Prob}(\xi(0) > u) = u^{-\alpha}, \quad \alpha > d.$

Caudas pesadas

Pareto: $\quad \text{Prob}(\xi(0) > u) = u^{-\alpha}, \quad \alpha > d.$

Lacoin-König-Mörters-Sidorova '09 (caudas Pareto):

Caudas pesadas

Pareto: $\quad \text{Prob}(\xi(0) > u) = u^{-\alpha}, \quad \alpha > d.$

Lacoin-König-Mörters-Sidorova '09 (caudas Pareto):

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ tal que

Caudas pesadas

Pareto: $\quad \text{Prob}(\xi(0) > u) = u^{-\alpha}, \quad \alpha > d.$

Lacoin-König-Mörters-Sidorova '09 (caudas Pareto):

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t, Z_t)}{U(t)} \overset{\text{P}}{=} 1 \quad \text{(localização completa)} \tag{1}$$

Caudas pesadas

Pareto: $\quad \text{Prob}(\xi(0) > u) = u^{-\alpha}, \quad \alpha > d.$

Lacoin-König-Mörters-Sidorova '09 (caudas Pareto):

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t, Z_t)}{U(t)} \overset{\text{P}}{=} 1 \quad \text{(localização completa)} \tag{1}$$

"Duas cidades": versão q.c. de (1) com 2 sítios Z_t^1, Z_t^2.

Caudas pesadas

Pareto: $\quad \mathrm{Prob}(\xi(0) > u) = u^{-\alpha}, \quad \alpha > d.$

Lacoin-König-Mörters-Sidorova '09 (caudas Pareto):

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t, Z_t)}{U(t)} \overset{\mathrm{P}}{=} 1 \quad \text{(localização completa)} \tag{1}$$

"Duas cidades": versão q.c. de (1) com 2 sítios Z_t^1, Z_t^2.

Caudas Weibull: Lacoin-Mörters, Sidorova-Twarovski, Fiodorov-Muirhead.

Concentração de massa para caudas DE

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

Concentração de massa para caudas DE

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ satisfazendo:

Concentração de massa para caudas DE

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ satisfazendo: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ R > 0$ tal que

Concentração de massa para caudas DE

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ satisfazendo: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, R > 0$ tal que

$$\frac{1}{U(t)} \sum_{z\colon\, |z-Z_t| \le R} u(t,z) \ge 1 - \varepsilon$$

Concentração de massa para caudas DE

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ satisfazendo: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, R > 0$ tal que

$$\frac{1}{U(t)} \sum_{z\colon |z - Z_t| \le R} u(t,z) \ge 1 - \varepsilon$$

com probabilidade tendendo a 1 quando $t \to \infty$.

Limite de escala e envelhecimento

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

Limite de escala e envelhecimento

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

1) $\dfrac{(d \log t)(\log\log\log t)}{\varrho t} \, Z_t$

Limite de escala e envelhecimento

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

1) $$\frac{(d \log t)(\log \log \log t)}{\varrho t} Z_t \Longrightarrow \frac{1}{2^d} e^{-|z|} dz.$$

Limite de escala e envelhecimento

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

1) $$\frac{(d \log t)(\log\log\log t)}{\varrho t} Z_t \Longrightarrow \frac{1}{2^d} e^{-|z|} dz.$$

2) $$\frac{1}{t} \inf \{u > t \colon Z_u \neq Z_t\} \Longrightarrow \Theta$$

Limite de escala e envelhecimento

Teorema (Biskup-König-S. '17) (caudas DE)

1) $$\frac{(d \log t)(\log\log\log t)}{\varrho t}\, Z_t \Longrightarrow \frac{1}{2^d} \mathrm{e}^{-|z|} \mathrm{d}z.$$

2) $$\frac{1}{t} \inf\{u > t \colon Z_u \neq Z_t\} \Longrightarrow \Theta \qquad (> 1 \text{ q.c.})$$

Extensões: BAM

Modelo de Bouchaud-Anderson: substituir Δ por $\Delta\sigma^{-1}$ onde σ é um campo aleatório iid positivo (modelo de Bouchaud).

Extensões: BAM

Modelo de Bouchaud-Anderson: substituir Δ por $\Delta\sigma^{-1}$ onde σ é um campo aleatório iid positivo (modelo de Bouchaud).

Interpretação populacional: $\sigma(x) =$ estabilidade do fenótipo x.

Extensões: BAM

Modelo de Bouchaud-Anderson: substituir Δ por $\Delta\sigma^{-1}$ onde σ é um campo aleatório iid positivo (modelo de Bouchaud).

Interpretação populacional: $\sigma(x)$ = estabilidade do fenótipo x.

Teorema (Muirhead, Pymar, S. 18)

BAM com ξ, σ independentes, ξ DE e

$$\operatorname{essinf} \sigma(0) > 0, \qquad \operatorname{esssup} \sigma(0) = \infty.$$

Extensões: BAM

Modelo de Bouchaud-Anderson: substituir Δ por $\Delta\sigma^{-1}$ onde σ é um campo aleatório iid positivo (modelo de Bouchaud).

Interpretação populacional: $\sigma(x) =$ estabilidade do fenótipo x.

Teorema (Muirhead, Pymar, S. 18)

BAM com ξ, σ independentes, ξ DE e

$$\operatorname{essinf} \sigma(0) > 0, \qquad \operatorname{esssup} \sigma(0) = \infty.$$

Existe $Z_t \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t, Z_t)}{U(t)} \overset{P}{=} 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to\infty} \sigma(Z_t) \overset{P}{=} \infty.$$

Extensões: outros grafos

Exemplo: substituir $\mathbb{Z}^d$ por uma árvore de Galton-Watson $\mathcal{GW}$ com distribuição de descendência D uniformemente limitada.

Extensões: outros grafos

Exemplo: substituir $\mathbb{Z}^d$ por uma árvore de Galton-Watson $\mathcal{GW}$ com distribuição de descendência D uniformemente limitada.

Teorema (den Hollander, König, S. '20).

PAM em $\mathcal{GW}$, ξ DE. Então, q.c. quando $t \to \infty$,

$$\frac{1}{t} \log U(t) = \varrho \log \left(\frac{\varrho t E[D]}{\log \log t} \right) - \varrho - \chi(\varrho) + o(1).$$

Extensões: outros grafos

Exemplo: substituir $\mathbb{Z}^d$ por uma árvore de Galton-Watson $\mathcal{GW}$ com distribuição de descendência D uniformemente limitada.

Teorema (den Hollander, König, S. '20).

PAM em $\mathcal{GW}$, ξ DE. Então, q.c. quando $t \to \infty$,

$$\frac{1}{t} \log U(t) = \varrho \log \left(\frac{\varrho t E[D]}{\log \log t} \right) - \varrho - \chi(\varrho) + o(1).$$

- $\chi(\varrho)$ obtida de um problema variacional.
- Para ϱ grande, sugere concentração em sub-árvore com graus mínimos.

Ferramentas: fórmula de Feynman-Kac

Ferramentas: fórmula de Feynman-Kac

$z \in D \subset \mathbb{Z}^d$.

Ferramentas: fórmula de Feynman-Kac

$z \in D \subset \mathbb{Z}^d$.

$u_{D,z}(t,x)$ solução do PAM em D,
condições de fronteira zero e cond. inicial $\mathbb{1}_z$.

Ferramentas: fórmula de Feynman-Kac

$z \in D \subset \mathbb{Z}^d$.

$u_{D,z}(t,x)$	solução do PAM em D, condições de fronteira zero e cond. inicial $\mathbb{1}_z$.

Representação de Feynman-Kac:

$$u_{D,z}(t,x) = \mathbb{E}_z\left[\mathrm{e}^{\int_0^t \xi(X_s)\mathrm{d}s}\mathbb{1}_{\{\tau_{D^c}>t, X_t=x\}}\right].$$

Ferramentas: fórmula de Feynman-Kac

$z \in D \subset \mathbb{Z}^d$.

$u_{D,z}(t,x)$ solução do PAM em D,
condições de fronteira zero e cond. inicial $\mathbb{1}_z$.

Representação de Feynman-Kac:

$$u_{D,z}(t,x) = \mathbb{E}_z\left[\mathrm{e}^{\int_0^t \xi(X_s)\mathrm{d}s}\mathbb{1}_{\{\tau_{D^c}>t, X_t=x\}}\right].$$

$$U_{D,z}(t) = \mathbb{E}_z\left[\mathrm{e}^{\int_0^t \xi(X_s)\mathrm{d}s}\mathbb{1}_{\{\tau_{D^c}>t\}}\right].$$

Ferramentas: expansão espectral

$z \in D \subset \mathbb{Z}^d$, D finito.

$u_{D,z}(t,x)$	solução do PAM em D, condições de fronteira zero e cond. inicial $\mathbb{1}_z$.

Ferramentas: expansão espectral

$z \in D \subset \mathbb{Z}^d$, D finito.

$u_{D,z}(t,x)$ solução do PAM em D,
condições de fronteira zero e cond. inicial $\mathbb{1}_z$.

Representação espectral:

$$u_{D,z}(t,x) = \sum_{k=1}^{|D|} \mathrm{e}^{t\lambda_D^{(k)}} \varphi_D^{(k)}(x)\varphi_D^{(k)}(z),$$

Ferramentas: expansão espectral

$z \in D \subset \mathbb{Z}^d$, D finito.

$u_{D,z}(t,x)$ solução do PAM em D, condições de fronteira zero e cond. inicial $\mathbb{1}_z$.

Representação espectral:

$$u_{D,z}(t,x) = \sum_{k=1}^{|D|} \mathrm{e}^{t\lambda_D^{(k)}} \varphi_D^{(k)}(x)\varphi_D^{(k)}(z),$$

$\lambda_D^{(k)}$, $\varphi_D^{(k)}$ autovalores/autofunções do operador de Anderson em D com c.f. zero.

Estratégia para a cota inferior

Estratégia para a cota inferior

$$U(t) \geq \mathbb{E}_0 \left[\mathrm{e}^{\int_0^t \xi(X_s)\mathrm{d}s} \mathbb{1}_{\Omega_t} \right]$$

Estratégia para a cota inferior

$$U(t) \geq \mathbb{E}_0 \left[e^{\int_0^t \xi(X_s) ds} \mathbb{1}_{\Omega_t} \right]$$

$$\Omega_t = \Big\{ \text{atingir } z_D \text{ em tempo } s < t \\ \text{e ficar em } D \text{ até o tempo } t \Big\}.$$

Estratégia para a cota inferior

$$U(t) \geq \mathbb{E}_0\left[e^{\int_0^t \xi(X_s)\mathrm{d}s} \mathbb{1}_{\Omega_t} \right]$$

$$\Omega_t = \Big\{ \text{atingir } z_D \text{ em tempo } s < t \\ \text{e ficar em } D \text{ até o tempo } t \Big\}.$$

$$U(t) \gtrapprox (\text{custo de atingir } z_D \text{ em tempo } s) \\ \times (\text{recompensa por ficar em } D \text{ por tempo } t - s)\,.$$

Estratégia para a cota inferior

Recompensa por ficar em D por tempo $t-s$: $\approx \mathrm{e}^{(t-s)\lambda_D^{(1)}}$.

Estratégia para a cota inferior

Recompensa por ficar em D por tempo $t-s$: $\quad \approx \mathrm{e}^{(t-s)\lambda_D^{(1)}}$.

Custo de atingir z_D em tempo s: $\quad \approx \mathrm{e}^{-|z_D|\log\frac{|z_D|}{s}}$.

Estratégia para a cota inferior

Recompensa por ficar em D por tempo $t - s$: $\approx \mathrm{e}^{(t-s)\lambda_D^{(1)}}$.

Custo de atingir z_D em tempo s: $\approx \mathrm{e}^{-|z_D| \log \frac{|z_D|}{s}}$.

Contribuição total: $\approx \mathrm{e}^{t\lambda_D^{(1)} - s\lambda_D^{(1)} - |z_D| \log \frac{|z_D|}{s}}$.

Estratégia para a cota inferior

Recompensa por ficar em D por tempo $t - s$: $\approx \mathrm{e}^{(t-s)\lambda_D^{(1)}}$.

Custo de atingir z_D em tempo s: $\approx \mathrm{e}^{-|z_D| \log \frac{|z_D|}{s}}$.

Contribuição total: $\approx \mathrm{e}^{t\lambda_D^{(1)} - s\lambda_D^{(1)} - |z_D| \log \frac{|z_D|}{s}}$.

Otimizando em s: $\approx \exp\{t\lambda_D^{(1)} - \log \lambda_D^{(1)} |z_D|\}$.

Definição do ponto de concentração

$$\Psi_t(D) := \lambda_D^{(1)} - \log \lambda_D^{(1)} \frac{|z_D|}{t}.$$

Definição do ponto de concentração

$$\Psi_t(D) := \lambda_D^{(1)} - \log \lambda_D^{(1)} \frac{|z_D|}{t}.$$

$$D_t := \arg\max_{D \in \mathscr{D}_t} \Psi_t(D).$$

Definição do ponto de concentração

$$\Psi_t(D) := \lambda_D^{(1)} - \log \lambda_D^{(1)} \frac{|z_D|}{t}.$$

$$D_t := \arg\max_{D \in \mathscr{D}_t} \Psi_t(D).$$

$$Z_t := z_{D_t}.$$

Convergência de um processo pontual

Convergência de um processo pontual

Com escalas $d_t = \varrho/(d \log t)$, $a_t \sim \varrho \log\log t$:

$$\left\{ \frac{\lambda_D^{(1)} - a_t}{d_t} \colon D \in \mathscr{D}_t \right\} \Rightarrow \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda).$$

Convergência de um processo pontual

Com escalas $\quad d_t = \varrho/(d\log t), \quad a_t \sim \varrho\log\log t$:

$$\left\{ \frac{\lambda_D^{(1)} - a_t}{d_t} \colon D \in \mathscr{D}_t \right\} \Rightarrow \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda).$$

Equilíbrio: $\quad \lambda_D^{(1)} - \log\lambda_D^{(1)} \dfrac{|z_D|}{t}$

Convergência de um processo pontual

Com escalas $\quad d_t = \varrho/(d \log t), \quad a_t \sim \varrho \log\log t$:

$$\left\{ \frac{\lambda_D^{(1)} - a_t}{d_t} : D \in \mathscr{D}_t \right\} \Rightarrow \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda).$$

Equilíbrio: $\quad \lambda_D^{(1)} - \log a_t \dfrac{|z_D|}{t}$

Convergência de um processo pontual

Com escalas $d_t = \varrho/(d \log t)$, $a_t \sim \varrho \log\log t$:

$$\left\{ \frac{\lambda_D^{(1)} - a_t}{d_t} : D \in \mathscr{D}_t \right\} \Rightarrow \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda).$$

Equilíbrio: $\lambda_D^{(1)} - a_t - \log a_t \dfrac{|z_D|}{t}$

Convergência de um processo pontual

Com escalas $\quad d_t = \varrho/(d \log t), \quad a_t \sim \varrho \log\log t$:

$$\left\{ \frac{\lambda_D^{(1)} - a_t}{d_t} \colon D \in \mathscr{D}_t \right\} \Rightarrow \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{d}\lambda).$$

Equilíbrio: $$\frac{\lambda_D^{(1)} - a_t}{d_t} - \frac{\log a_t}{d_t} \frac{|z_D|}{t}$$

Convergência de um processo pontual

Com escalas $\quad d_t = \varrho/(d \log t), \quad a_t \sim \varrho \log\log t$:

$$\left\{ \frac{\lambda_D^{(1)} - a_t}{d_t} \colon D \in \mathscr{D}_t \right\} \Rightarrow \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda).$$

Equilíbrio: $$\frac{\lambda_D^{(1)} - a_t}{d_t} - \frac{\log\log\log t}{d_t}\frac{|z_D|}{t}$$

Referências

1. M Biskup, W. König e R.S. dos Santos, Mass concentration and aging in the parabolic Anderson model with doubly-exponential tails, Probab. Theory Relat. Fields 171 (2018) 251–331.
2. S. Muirhead, R. Pymar e R.S. dos Santos, The Bouchaud-Anderson model with double-exponential potential, Ann. Appl. Probab. 29 (2019) 264–325.
3. F. den Hollander, W. König e R.S. dos Santos, The parabolic Anderson model on a Galton-Watson tree, aceito para publicação em "Progress in Probability".

Obrigado!