Processo de Contato com Renovações: transição de fase e sobrevivência

Daniel Ungaretti

Colmea, 2021

Processo de Contato

Modela disseminação de infecção em uma população.

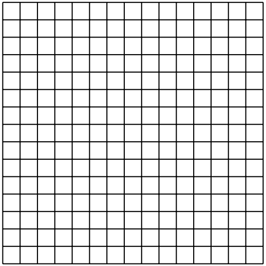
População: grafo $G = (V, E)$

Processo de Contato

Modela disseminação de infecção em uma população.

População: grafo $G = (V, E)$

Redes sociais



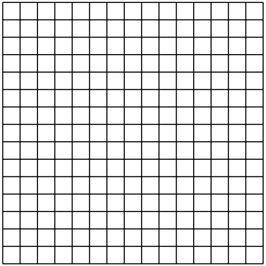
Rede $\mathbb{Z}^d$

Processo de Contato

Modela disseminação de infecção em uma população.

População: grafo $G = (V, E)$

Redes sociais



Rede $\mathbb{Z}^d$

$$\text{Vértices} \iff \text{Pessoas}$$

$$\text{Elos} \iff \text{Alcance da infecção}$$

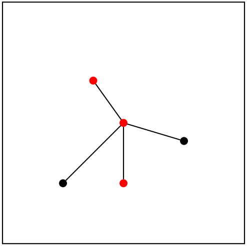
Configuração no tempo t: $\xi_t \in \{0,1\}^V$

Estados: saudável e infectado

Configuração no tempo t: $\xi_t \in \{0,1\}^V$

Estados: saudável e infectado

- Infectado $\longrightarrow$ saudável: taxa 1

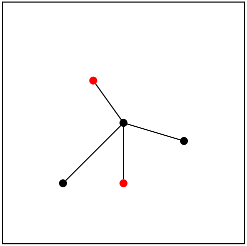


Infectado $\longrightarrow$ saudável

Configuração no tempo t: $\xi_t \in \{0,1\}^V$

Estados: saudável e infectado

- Infectado $\longrightarrow$ saudável: taxa 1

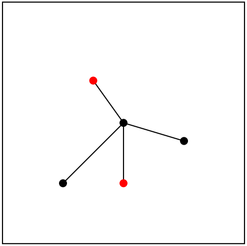


Infectado $\longrightarrow$ saudável

Configuração no tempo t: $\xi_t \in \{0,1\}^V$

Estados: saudável e infectado

- Infectado $\longrightarrow$ saudável: taxa 1
- Saudável $\longrightarrow$ infectado: taxa $\lambda \times (\#$ vizinhos infectados$)$

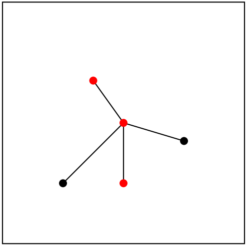


Saudável $\longrightarrow$ infectado

Configuração no tempo t: $\xi_t \in \{0,1\}^V$

Estados: saudável e infectado

- Infectado $\longrightarrow$ saudável: taxa 1
- Saudável $\longrightarrow$ infectado: taxa $\lambda \times (\#$ vizinhos infectados$)$

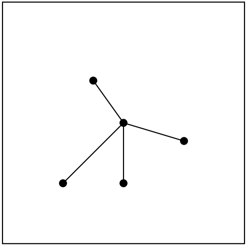


Saudável $\longrightarrow$ infectado

Configuração no tempo t: $\quad \xi_t \in \{0,1\}^V$

Estados: saudável e infectado

- Infectado $\longrightarrow$ saudável: taxa 1
- Saudável $\longrightarrow$ infectado: taxa $\lambda \times$ ($\#$ vizinhos infectados)



Saudável $\longrightarrow$ infectado

$\xi_t \equiv 0$ é um estado absorvente.

Motivação

Processo de Contato:

Motivação

Processo de Contato:

Hipóteses:

Infecções e curas dadas por Processos de Poisson.

Parâmetro de transmissão $\lambda > 0$ governa o comportamento.

Processo de Contato:

Hipóteses:

Infecções e curas dadas por Processos de Poisson.

Parâmetro de transmissão $\lambda > 0$ governa o comportamento.

Prós: $\times$ Contras:

Processo de Contato:

Hipóteses:

Infecções e curas dadas por Processos de Poisson.

Parâmetro de transmissão $\lambda > 0$ governa o comportamento.

Prós:

- muita independência;

$\times$

Contras:

Motivação

Processo de Contato:

Hipóteses:

Infecções e curas dadas por Processos de Poisson.

Parâmetro de transmissão $\lambda > 0$ governa o comportamento.

Prós:

- muita independência;
- poucos parâmetros;

$\times$

Contras:

Processo de Contato:

Hipóteses:

Infecções e curas dadas por Processos de Poisson.

Parâmetro de transmissão $\lambda > 0$ governa o comportamento.

Prós:

- muita independência;
- poucos parâmetros;

$\times$

Contras:

- pode ser irreal;

Motivação

Processo de Contato:

Hipóteses:

Infecções e curas dadas por Processos de Poisson.

Parâmetro de transmissão $\lambda > 0$ governa o comportamento.

Prós:		Contras:
▶ muita independência;	$\times$	▶ pode ser irreal;
▶ poucos parâmetros;		▶ poucos parâmetros;

Motivação

Processo de Contato:

Hipóteses:

Infecções e curas dadas por Processos de Poisson.

Parâmetro de transmissão $\lambda > 0$ governa o comportamento.

Prós:		Contras:
▶ muita independência;	$\times$	▶ pode ser irreal;
▶ poucos parâmetros;		▶ poucos parâmetros;

Processo de Contato com Renovações: curas dadas por

processo de renovação com distribuição entre chegadas μ

Motivação

Processo de Contato:

Hipóteses:
Infecções e curas dadas por Processos de Poisson.
Parâmetro de transmissão $\lambda > 0$ governa o comportamento.

Prós:

- muita independência;
- poucos parâmetros;

$\times$

Contras:

- pode ser irreal;
- poucos parâmetros;

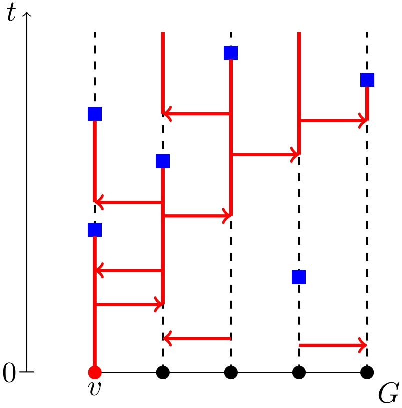
Processo de Contato com Renovações: curas dadas por

processo de renovação com distribuição entre chegadas μ

Perguntas

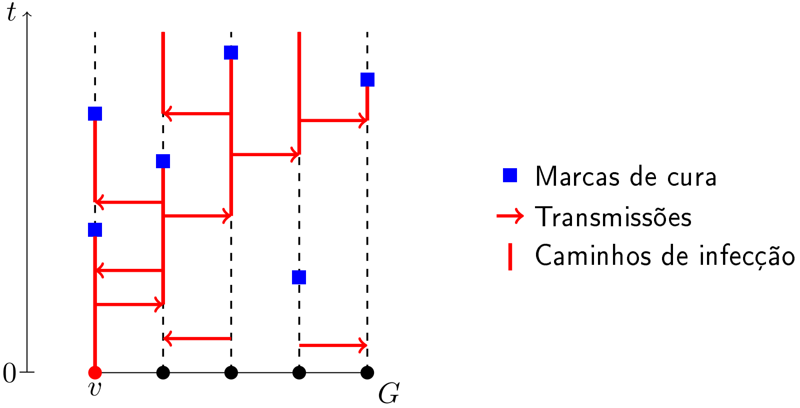
A infecção sobrevive? Como λ e μ afetam o modelo?

Representação Gráfica



- Marcas de cura
- Transmissões
- Caminhos de infecção

Representação Gráfica



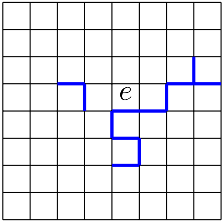
Sobrevivência $\iff$ Percolação

Percolação

Modelos gerais para **ambientes aleatórios**.

Modelos gerais para **ambientes aleatórios**.

- Percolação de Bernoulli: ambiente aleatório $\Leftrightarrow$ elos abertos.

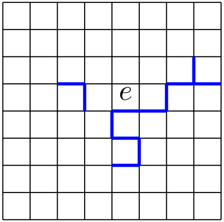


Independentemente, $\forall e$:

$$P_p(e \text{ aberto}) = p,$$
$$P_p(e \text{ fechado}) = 1 - p.$$

Modelos gerais para **ambientes aleatórios**.

- Percolação de Bernoulli: ambiente aleatório $\Leftrightarrow$ elos abertos.



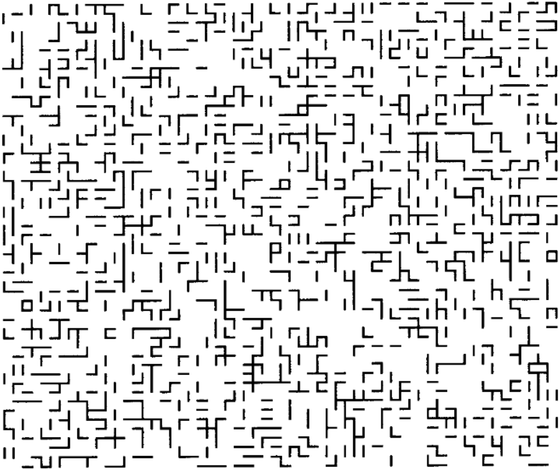
Independentemente, $\forall e$:

$$P_p(e \text{ aberto}) = p,$$
$$P_p(e \text{ fechado}) = 1 - p.$$

Pergunta:

- O modelo percola?
  (Existe componente infinita?)

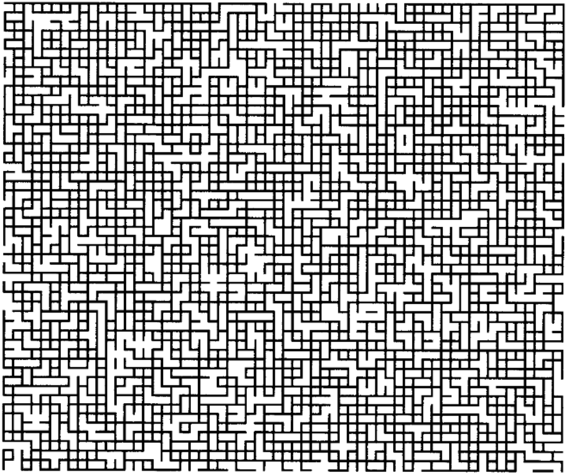
Percolação



(a) $p = 0.25$

Fonte: Grimmett, *Percolation*

Percolação



(d) $p = 0.75$

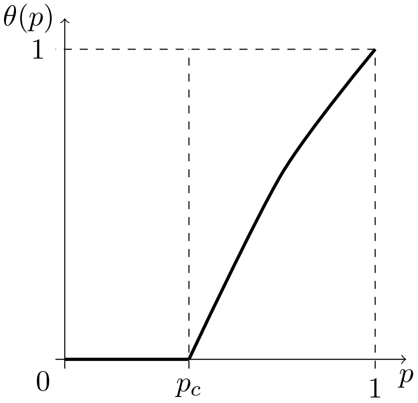
Fonte: Grimmett, *Percolation*

Transição de fase

Transição de fase

- Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$:

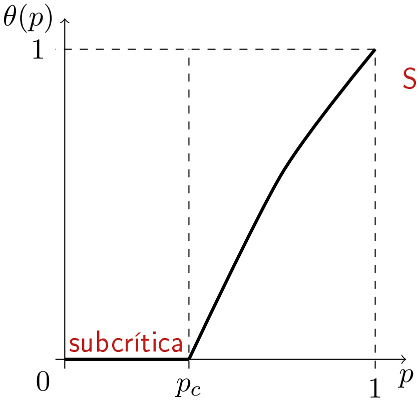
$$p_c(\mathbb{Z}^d) := \sup\{p \geq 0;\ \theta(p) := P_p(0 \longleftrightarrow \infty) = 0\}.$$



Transição de fase

- Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$:

$$p_c(\mathbb{Z}^d) := \sup\{p \geq 0;\ \theta(p) := P_p(0 \longleftrightarrow \infty) = 0\}.$$



Subcrítica:

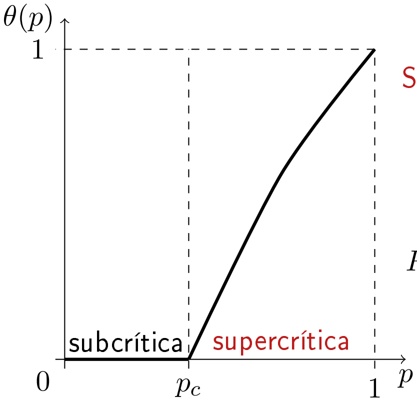
- Clusters finitos;
- Decaimento exponencial:

$$P_p(|C(0)| \geq n) \leq e^{-cn}.$$

Transição de fase

- Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$:

$$p_c(\mathbb{Z}^d) := \sup\{p \geq 0;\ \theta(p) := P_p(0 \longleftrightarrow \infty) = 0\}.$$



Supercrítica:

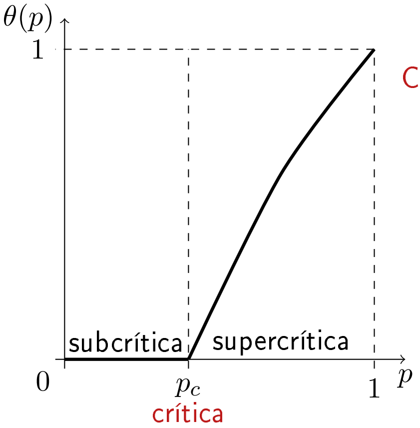
- Único cluster infinito;
- Decaimento (clusters finitos):

$$P_p(n \leq |C(0)| < \infty) \approx e^{-cn^{\frac{d-1}{d}}}.$$

Transição de fase

- Percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$:

$$p_c(\mathbb{Z}^d) := \sup\{p \geq 0;\ \theta(p) := P_p(0 \longleftrightarrow \infty) = 0\}.$$



Crítica:

- Poucos resultados rigorosos;
- Esperado:
  não percola;
- Esperado:
  expoentes críticos;

Transição de fase

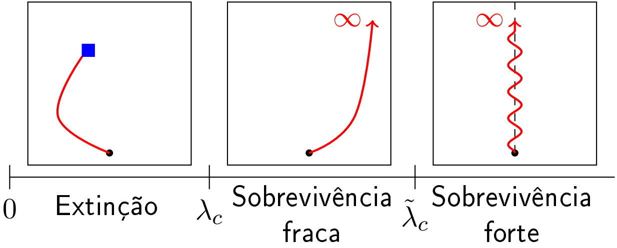
- Processo de Contato em $\mathbb{Z}^d$:

$$\lambda_c(\mathbb{Z}^d) := \sup\{\lambda \geq 0;\ P_\lambda(\text{infecção de 0 sobrevive}) = 0\}$$
$$\tilde{\lambda}_c(\mathbb{Z}^d) := \inf\{\lambda \geq 0;\ P_\lambda(\text{0 reinfectado infinitas vezes}) > 0\}.$$

Transição de fase

- Processo de Contato em $\mathbb{Z}^d$:

$$\lambda_c(\mathbb{Z}^d) := \sup\{\lambda \geq 0;\ P_\lambda(\text{infecção de 0 sobrevive}) = 0\}$$
$$\tilde{\lambda}_c(\mathbb{Z}^d) := \inf\{\lambda \geq 0;\ P_\lambda(\text{0 reinfectado infinitas vezes}) > 0\}.$$

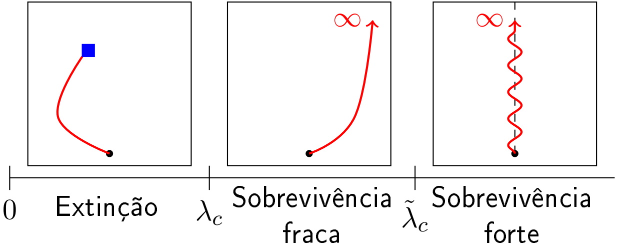


Transição de fase

- Processo de Contato em $\mathbb{Z}^d$:

$$\lambda_c(\mathbb{Z}^d) := \sup\{\lambda \geq 0;\ P_\lambda(\text{infecção de 0 sobrevive}) = 0\}$$

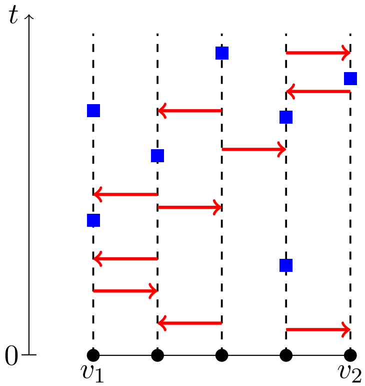
$$\tilde{\lambda}_c(\mathbb{Z}^d) := \inf\{\lambda \geq 0;\ P_\lambda(\text{0 reinfectado infinitas vezes}) > 0\}.$$



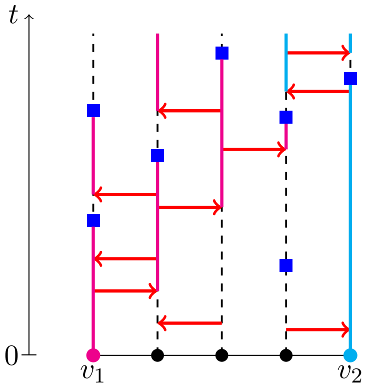
$$\lambda_c = \tilde{\lambda}_c$$

Propriedades do PC

- **Aditividade:** $$\xi_t^{A\cup B} = \xi_t^A + \xi_t^B.$$

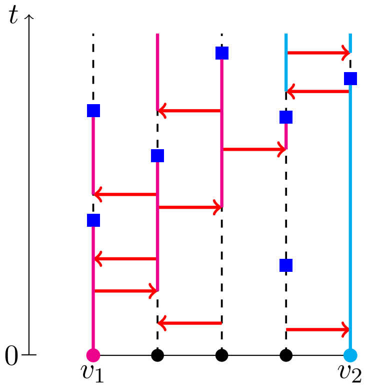


- Aditividade: $$\xi_t^{A\cup B} = \xi_t^A + \xi_t^B.$$



Propriedades do PC

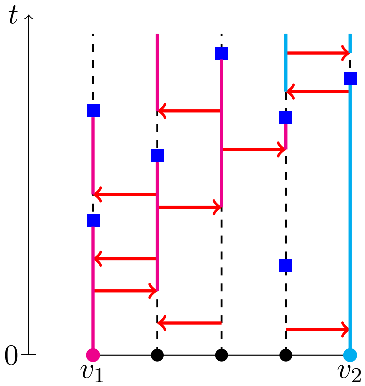
- Aditividade: $$\xi_t^{A\cup B} = \xi_t^A + \xi_t^B.$$



- Monótono em λ.

Propriedades do PC

- Aditividade: $$\xi_t^{A\cup B} = \xi_t^A + \xi_t^B.$$



- Monótono em λ.
- Regiões disjuntas são independentes.

Processo de Contato com Renovações

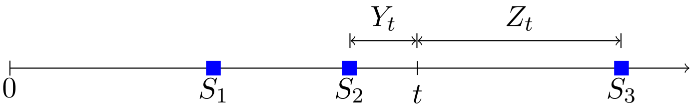
Marcas de cura: não são mais Poisson!

Processo de Contato com Renovações

Marcas de cura: não são mais Poisson!

Seja (T_i) iid. com $T_i \stackrel{d}{=} \mu$.

$$S_n := T_1 + T_2 + \ldots + T_n.$$

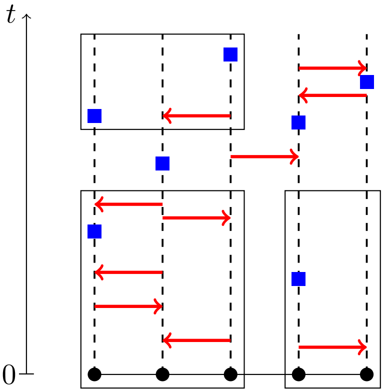


Y_t: idade $\qquad$ Z_t: excesso.

Cada vértice x tem processo de renovação independente $\mathcal{R}_x$

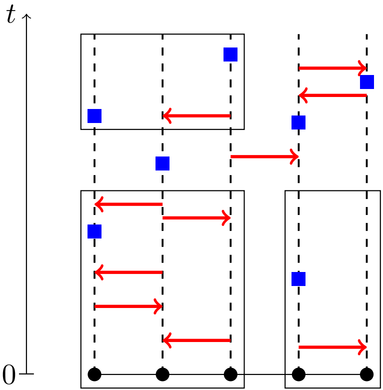
Processo de Contato com Renovações

Problema: Perdemos propriedade de Markov.



Processo de Contato com Renovações

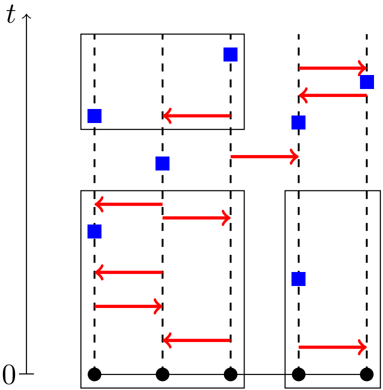
Problema: Perdemos propriedade de Markov.



Como lidar com isso?

Processo de Contato com Renovações

Problema: Perdemos propriedade de Markov.



Como lidar com isso?

Controlar as marcas de cura

Processo de Contato com Renovações

Medida de renovação: $U(I) := E(\#\text{ marcas em } I)$

Strong Renewal Theorem

Medida de renovação: $U(I) := E(\#\text{ marcas em } I)$

Strong Renewal Theorem

- Quando $m = \int t\,\mu(\mathrm{d}t) < \infty$:

$$U([t, t+h]) \sim \frac{h}{m}.$$

Medida de renovação: $U(I) := E(\#\text{ marcas em } I)$

Strong Renewal Theorem

- Quando $m = \int t\,\mu(\mathrm{d}t) < \infty$:

$$U([t, t+h]) \sim \frac{h}{m}.$$

- Erickson '70; Caravenna, Doney '19
  Fixe $\alpha \in (0,1)$ e $\mu(t,\infty) = L(t)t^{-\alpha}$ ($+$ regularidade):

$$U([t, t+h]) \sim C_\alpha \frac{h}{L(t)t^{1-\alpha}}.$$

Processo de Contato com Renovações

Cotas Uniformes

Cotas Uniformes

- (Caudas leves)
  Se $f(x) \uparrow \infty$ e $\int x f(x)\mu(\mathrm{d}x) < \infty$:

$$\sup_{t \geq 0} P(\mathcal{R} \cap [t, t+u] = \varnothing) \leq \frac{C}{f(u)}.$$

Cotas Uniformes

- (Caudas leves)
  Se $f(x) \uparrow \infty$ e $\int x f(x) \mu(\mathrm{d}x) < \infty$:

$$\sup_{t \geq 0} P(\mathcal{R} \cap [t, t+u] = \varnothing) \leq \frac{C}{f(u)}.$$

- (Caudas pesadas)
  Fontes, Marchetti, Mountford, Vares '19

$$\mu(t, \infty) = \frac{L(t)}{t^\alpha},\ \alpha \in (0,1),\ L(\cdot) \text{ variação lenta.}$$

$$K > 1 \text{ fixado}: \qquad \inf_{t \geq 1} P(\mathcal{R} \cap [t, Kt] = \varnothing) > 0.$$

$$\text{Existe } \epsilon > 0,\ t \text{ grande}: \qquad P(\mathcal{R} \cap [t, t + t^\epsilon] = \varnothing) \geq 1 - t^{-\epsilon}.$$

Trabalhos Anteriores

Caudas pesadas:

Trabalhos Anteriores

Caudas pesadas:

- Fontes, Marchetti, Mountford, Vares '19:

G infinito e μ com cauda pesada então
$\forall \lambda > 0$: extinção qc.

Caudas pesadas:

- Fontes, Marchetti, Mountford, Vares '19:

  G infinito e μ com cauda pesada então
  $\forall\lambda > 0$: extinção qc.

- Fontes, Gomes, Sanchis '19:

  $G = (V, E)$ finito e μ com cauda pesada então

$$P_{\lambda,\mu}(\text{infecção sobrevive}) \begin{cases} = 0 & \text{se } |V| < V_-(\alpha); \\ > 0 & \text{se } |V| > V_+(\alpha); \end{cases}$$

Cotas explícitas: $|V_+(\alpha) - V_-(\alpha)| < 1.$

Trabalhos Anteriores

Caudas leves:

- Fontes, Mountford, Vares '20

$$\text{Condições para } \lambda_c(\mu, \mathbb{Z}^d) > 0.$$

Trabalhos Anteriores

Caudas leves:

- Fontes, Mountford, Vares '20

$$\text{Condições para } \lambda_c(\mu, \mathbb{Z}^d) > 0.$$

Teorema 1

Em $\mathbb{Z}^d$, se $\int t^2 \, \mu(\mathrm{d}t) < \infty$ então $\lambda_c(\mu) > 0$.

Trabalhos Anteriores

Caudas leves:

- Fontes, Mountford, Vares '20

$$\text{Condições para } \lambda_c(\mu, \mathbb{Z}^d) > 0.$$

Teorema 1

Em $\mathbb{Z}^d$, se $\int t^2\,\mu(\mathrm{d}t) < \infty$ então $\lambda_c(\mu) > 0$.

Teorema 2

Em $\mathbb{Z}$, se

$$\left.\begin{array}{l} - \int t^\alpha\,\mu(\mathrm{d}t) < \infty \text{ para algum } \alpha > 1; \\ - \mu \text{ tem densidade: } F(t) := \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u; \\ - \text{Taxa de falha } t \mapsto \frac{f(t)}{1-F(t)} \text{ é decrescente;} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Hipótese A} \\ \text{(FKG)}\end{array}$$

$$\text{então } \lambda_c(\mu) > 0.$$

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 1 (Condição nos momentos)

Em $\mathbb{Z}^d$, se existe $\theta > \sqrt{(8 \ln 2) d}$ tal que

$$\int_1^\infty x \exp\left[\theta (\ln x)^{1/2}\right] \mu(\mathrm{d}x) < \infty,$$

então $\lambda_c(\mu) > 0$.

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 1 (Condição nos momentos)
Em $\mathbb{Z}^d$, se existe $\theta > \sqrt{(8\ln 2)d}$ tal que

$$\int_1^\infty x \exp\left[\theta(\ln x)^{1/2}\right] \mu(\mathrm{d}x) < \infty,$$

então $\lambda_c(\mu) > 0$.

Condições mais fracas para $\lambda_c(\mu, \mathbb{Z}^d) > 0$:

- Mesma construção para qualquer $d \geq 2$;

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 1 (Condição nos momentos)

Em $\mathbb{Z}^d$, se existe $\theta > \sqrt{(8\ln 2)d}$ tal que

$$\int_1^\infty x \exp\left[\theta(\ln x)^{1/2}\right]\mu(\mathrm{d}x) < \infty,$$

então $\lambda_c(\mu) > 0$.

Condições mais fracas para $\lambda_c(\mu, \mathbb{Z}^d) > 0$:

- Mesma construção para qualquer $d \geq 2$;
- Sem Hipótese A;

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 1 (Condição nos momentos)

Em $\mathbb{Z}^d$, se existe $\theta > \sqrt{(8\ln 2)d}$ tal que

$$\int_1^\infty x \exp\left[\theta(\ln x)^{1/2}\right]\mu(\mathrm{d}x) < \infty,$$

então $\lambda_c(\mu) > 0$.

Condições mais fracas para $\lambda_c(\mu, \mathbb{Z}^d) > 0$:

- Mesma construção para qualquer $d \geq 2$;
- Sem Hipótese A;
- Condição de momento: perto de primeiro momento finito;

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 2 (Convergência completa)

Em $\mathbb{Z}^d$, supor μ satisfaz regularidade de [FMMV].
Para qualquer configuração inicial ξ_0 e $\lambda > 0$ vale que

$$\xi_t \Longrightarrow P(\tau < \infty)\delta_{\underline{0}} + P(\tau = \infty)\delta_{\underline{1}}, \qquad \text{quando } t \to \infty.$$

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 2 (Convergência completa)

Em $\mathbb{Z}^d$, supor μ satisfaz regularidade de [FMMV].
Para qualquer configuração inicial ξ_0 e $\lambda > 0$ vale que

$$\xi_t \Longrightarrow P(\tau < \infty)\delta_{\underline{0}} + P(\tau = \infty)\delta_{\underline{1}}, \qquad \text{quando } t \to \infty.$$

- Melhora a construção de FMMV;

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

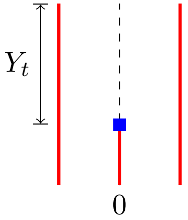
Teorema 2 (Convergência completa)

Em $\mathbb{Z}^d$, supor μ satisfaz regularidade de [FMMV].
Para qualquer configuração inicial ξ_0 e $\lambda > 0$ vale que

$$\xi_t \Longrightarrow P(\tau < \infty)\delta_{\underline{0}} + P(\tau = \infty)\delta_{\underline{1}}, \qquad \text{quando } t \to \infty.$$

- Melhora a construção de FMMV;
- Novo tipo de resultado:

'para t grande, $\xi_t(0) = 1 \iff$
há transmissão durante $[t - Y_t(0), t]$'



Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 3 (Determinismo aproximado)

Em $\mathbb{Z}^d$, seja $\mu(t,\infty) = L(t)t^{-\alpha}$.

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 3 (Determinismo aproximado)
Em $\mathbb{Z}^d$, seja $\mu(t,\infty) = L(t)t^{-\alpha}$.

Se $\alpha \in (0, 1/2)$ (+ regularidade), no evento $\{\tau = \infty\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \left| P(\xi_t(0) = 1 \mid \mathcal{R}, \tau) - \left(1 - e^{-2\lambda d Y_t(0)}\right) \right| = 0, \quad \text{q.c.}$$

Novos Resultados

- Fontes, Mountford, U., Vares '21 (arXiv)

Teorema 3 (Determinismo aproximado)

Em $\mathbb{Z}^d$, seja $\mu(t,\infty) = L(t)t^{-\alpha}$.

Se $\alpha \in (0, 1/2)$ (+ regularidade), no evento $\{\tau = \infty\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \left| P(\xi_t(0) = 1 \mid \mathcal{R}, \tau) - \left(1 - e^{-2\lambda d Y_t(0)}\right) \right| = 0, \quad \text{q.c.}$$

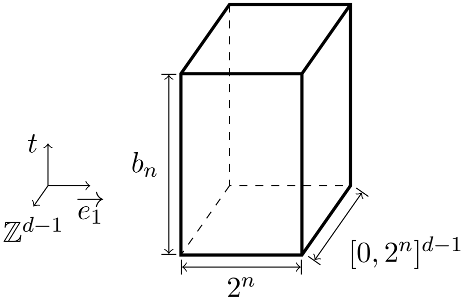
Se $\alpha \in (1/2, 1)$, no evento $\{\tau = \infty\}$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left| P(\xi_t(0) = 1 \mid \mathcal{R}, \tau) - \left(1 - e^{-2\lambda d Y_t(0)}\right) \right| > 0, \quad \text{q.c.}$$

Ideias

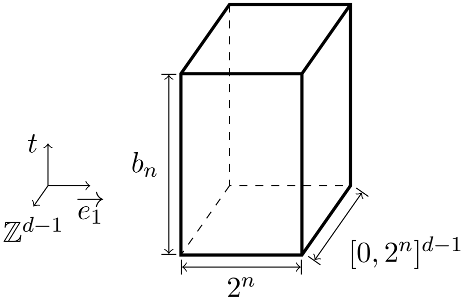
Teorema 1 (Condição nos momentos):

- Caixas $B_n := [0, 2^n]^d \times [0, b_n]$, com b_n escolhido depois.



Teorema 1 (Condição nos momentos):

- Caixas $B_n := [0, 2^n]^d \times [0, b_n]$, com b_n escolhido depois.
- Quatro eventos principais:

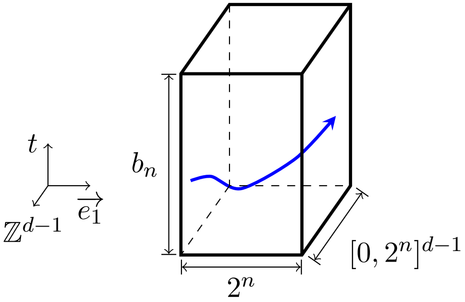


Ideias

Teorema 1 (Condição nos momentos):

- Caixas $B_n := [0, 2^n]^d \times [0, b_n]$, com b_n escolhido depois.
- Quatro eventos principais:

Cruzamento Espacial.
$S_j(B)$



Ideias

Teorema 1 (Condição nos momentos):

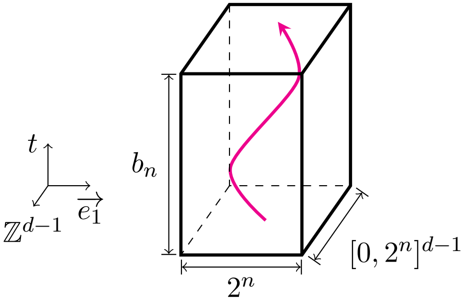
- Caixas $B_n := [0, 2^n]^d \times [0, b_n]$, com b_n escolhido depois.
- Quatro eventos principais:

Cruzamento Espacial.

$S_j(B)$

Cruzamento Temporal.

$T(B)$



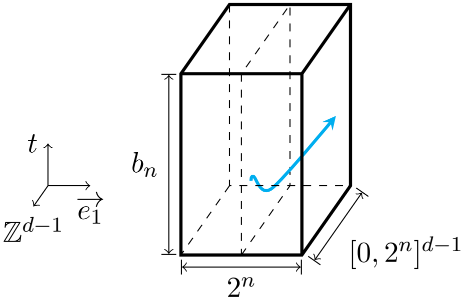
Teorema 1 (Condição nos momentos):

- Caixas $B_n := [0, 2^n]^d \times [0, b_n]$, com b_n escolhido depois.
- Quatro eventos principais:

Cruzamento Espacial.
$S_j(B)$

Cruzamento Temporal.
$T(B)$

Semi-cruzamento Esp.
$\tilde{S}_j(B)$



Teorema 1 (Condição nos momentos):

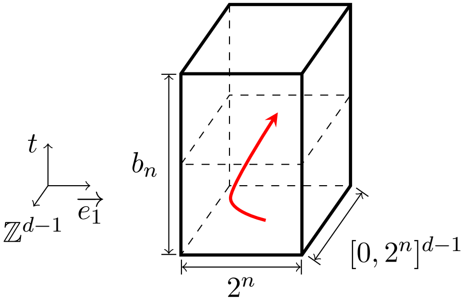
- Caixas $B_n := [0, 2^n]^d \times [0, b_n]$, com b_n escolhido depois.
- Quatro eventos principais:

Cruzamento Espacial.
$S_j(B)$

Cruzamento Temporal.
$T(B)$

Semi-cruzamento Esp.
$\tilde{S}_j(B)$

Semi-cruzamento Temp.
$\tilde{T}(B)$



Teorema 1 (Condição nos momentos):

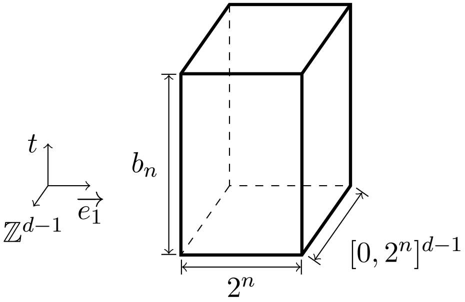
- Caixas $B_n := [0, 2^n]^d \times [0, b_n]$, com b_n escolhido depois.
- Quatro eventos principais:

Cruzamento Espacial.
$S_j(B)$

Cruzamento Temporal.
$T(B)$

Semi-cruzamento Esp.
$\tilde{S}_j(B)$

Semi-cruzamento Temp.
$\tilde{T}(B)$



$$\mathbb{P}(\tau^0 = \infty) \leq \mathbb{P}(T(B_n)) + 2d \cdot \mathbb{P}(\tilde{S}_1(B_n)) \longrightarrow 0.$$

Ideias

Teorema 1 (Condição nos momentos):

- Defina quantidades uniformes:

$$\tilde{s}_n := \sup \hat{\mathbb{P}}(\tilde{S}_j((x,t) + B_n)), \quad \tilde{t}_n := \sup \hat{\mathbb{P}}(\tilde{T}((x,t) + B_n)).$$

(x,t): translações em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+$.
$\hat{\mathbb{P}}$: renovações começam em pontos possivelmente diferentes.

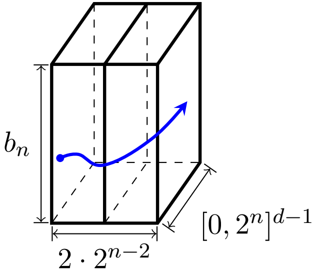
- Relacione escalas consecutivas:

Semi-cruzamento de B_n

$\Downarrow$

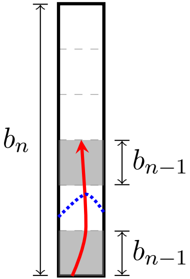
"2 semi-cruzamentos independentes de B_{n-1}"

Lema (Semi-cruzamento Espacial)



Ideias

Lema (Semi-cruzamento Temporal)



Se poucas curas:

Termo de erro.

Se curas suficientes:

Caixas $[0, 2^n]^d \times b_{n-1}$ independentes!

Ideias

Definindo $u_n := \tilde{s}_n + \tilde{t}_n$:

$$u_n \leq C(d) \cdot (b_n/b_{n-1})^2 \cdot u_{n-1}^2 + \frac{C2^{dn}}{f(b_{n-1})}.$$

Ideias

Definindo $u_n := \tilde{s}_n + \tilde{t}_n$:

$$u_n \leq C(d) \cdot (b_n/b_{n-1})^2 \cdot u_{n-1}^2 + \frac{C2^{dn}}{f(b_{n-1})}.$$

- Escolhas:

$$f = e^{-\theta(\ln x)^{1/2}} \mathbb{1}\{x \geq 1\} \quad \text{e} \quad b_n = e^{(\alpha/\theta)^2 n^2}.$$

Ideias

Definindo $u_n := \tilde{s}_n + \tilde{t}_n$:

$$u_n \leq C(d) \cdot (b_n/b_{n-1})^2 \cdot u_{n-1}^2 + \frac{C2^{dn}}{f(b_{n-1})}.$$

- Escolhas:

$$f = e^{-\theta(\ln x)^{1/2}} \mathbb{1}\{x \geq 1\} \quad \text{e} \quad b_n = e^{(\alpha/\theta)^2 n^2}.$$

- Indução:

$$u_n \leq e^{-\beta n} \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} \leq e^{-\beta(n+1)}.$$

Ideias

Definindo $u_n := \tilde{s}_n + \tilde{t}_n$:

$$u_n \leq C(d) \cdot (b_n/b_{n-1})^2 \cdot u_{n-1}^2 + \frac{C2^{dn}}{f(b_{n-1})}.$$

- Escolhas:

$$f = e^{-\theta(\ln x)^{1/2}} \mathbb{1}\{x \geq 1\} \quad \text{e} \quad b_n = e^{(\alpha/\theta)^2 n^2}.$$

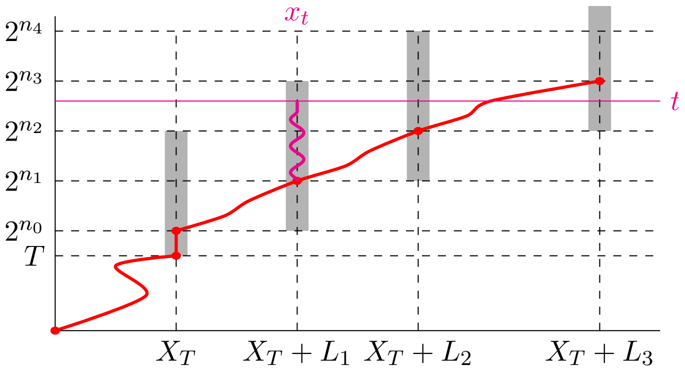
- Indução:

$$u_n \leq e^{-\beta n} \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} \leq e^{-\beta(n+1)}.$$

- Caso base:

$$u_{n_0} \leq e^{-\beta n_0} \quad \text{se } \lambda \text{ pequeno.}$$

Teorema 2 (Convergência completa):



Obrigado!