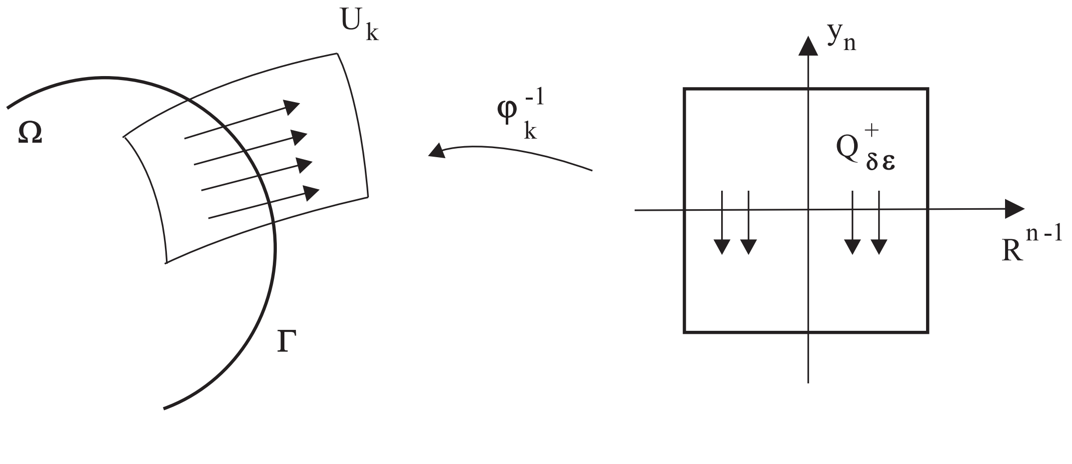
TEXTOS DE MATEMÁTICA
EDITORA INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ESPAÇOS DE SOBOLEV

Inicição aos Problemas Elíticos não Homogêneos

— LUIS ADAUTO MEDEIROS —
e
— MANUAL MILLA MIRANDA —



Instituto de Matemática - UFRJ

ESPAÇOS DE SOBOLEV

(Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)

por

L. A. Medeiros
Professor Emérito UFRJ

M. Milla Miranda
Professor Titular UFRJ

Rio de Janeiro, RJ
2019

Medeiros, Luis Adauto da Justa, 1926.

M488e Espaços de Sobolev - Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos /

Luis Adauto Medeiros e Manuel Milla Miranda-

Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2019.

185p.; 22cm.

Inclui bibliografia / inclui índice remissivo.

ISBN: **978-85-87674-36-4**

1. Espaços de Sobolev. 2. Equações diferenciais parciais elípticas

I. Milla Miranda, Manuel Antolino, 1941.

II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.

"Que Stendhal confessasse haver escrito um de seus livros para cem leitores, cousa é que admira e consterna. O que não admira, nem provavelmente consternará é se este outro livro não tiver os cem leitores de Stendhal, nem cinqüenta, nem vinte e, quando muito, dez. Dez? Talvez cinco."

Brás Cubas

"Dedicado à memória de nosso saudoso
Pedro Humberto Rivera Rodriguez
por seu talento matemático e
caráter exemplar."

Prefácio

A idéia de escrever o presente texto surgiu-nos em 1970 quando iniciamos um seminário sobre espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais, realizado no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. O objetivo principal era despertar a curiosidade em jovens para este aspecto da matemática e criar uma literatura em português, sobre este assunto de relevância no estudo da Análise Funcional. Posteriormente este seminário transferiu-se para o Instituto de Matemática da UFRJ, fortalecido pela inclusão de novos alunos e professores. As exposições se baseavam nos textos de J.-L. Lions, [13], [14].

Com a criação do Curso de Pós-Graduação em Matemática no IM-UFRJ, o presente texto vem sendo adotado nas disciplinas obrigatórias do curso relacionadas às equações diferenciais parciais. Ele foi muito modificado e aperfeiçoado a partir das aulas ministradas no IM concluindo-se, pelo menos no momento, a presente edição.

Esta edição deste livro vem bastante aumentada e melhorada relativamente às anteriores edições.

O livro compõe-se de três capítulos e um apêndice. O capítulo I é um fascículo contendo os principais resultados sobre integração à Lebesgue e das distribuições de Schwartz a serem usados nos capítulos seguintes. Não é preciso nenhum estudo prévio sobre distribuições para entender este capítulo. O capítulo II contém os resultados básicos sobre os espaços de Sobolev, seguindo, como já mencionado, J.-L. Lions [13] e [14]. Com esta exposição introdutória o leitor fica habilitado à leitura de vários trabalhos sobre a análise de soluções fracas para equações diferenciais parciais e de suas aplicações. No capítulo III são estudados os problemas de Dirichlet e Neumann com condições não nulas na fronteira, para o caso do operador de Laplace. Trata-se, portanto, de um capítulo introdutórioi sobre problemas elíticos não homogêneos.

O apêndice é dedicado ao estudo da regularidadeda da derivada normal, na fronteira lateral do cilindro, da solução fraca da equação de ondas. Esta propriedade da derivada normal foi observada, pela primeira vez, por Lions[16] no caso linear e posteriormente em [17] para não linearidade do tipo $|s|^\rho s$. Tendo em vista que esta propriedade da derivada normal não decorre das propriedades oriundas das estimativas a priori, Lions a denominou "hidden regularity". Ela é fundamental no estudo de soluções ultra fracas para a equação de ondas linear no desenvolvimento do método HUM idealizado por J.-L. Lions[18], [19]. O apêndice estende o resultado de J.-L. Lions[17] ao caso de uma não linearidade $F(s)$ apenas contínua com o mesmo sinal que s, cf. Strauss[9] apêndice. A função $F(s) = |s|^\rho s$, $\rho > 0$, é deste tipo.

Muitos leram as várias edições a quem agradecemos as sugestões e em particular, aos colegas Aldo Louredo, Alexandre Oliveira, Ricardo Carvalho. A presente edição foi revista e corrigida pelos colegas: Maria Darci, Gladson Antunes e Helvécio Rubens Crippa.

Ao Wilson Góes pelo trabalho de digitação, também agradecemos.

Rio de Janeiro, fevereiro de 2010

Os Autores

Conteúdo

Capítulo 1

Resultados Básicos Sobre Distribuições

Introdução

No presente capítulo serão fixadas terminologia, a notação e certos resultados sobre integração e teoria das distribuições, resultados estes a serem usados no desenvolver deste texto.

Com a letra $\mathbb{K}$ representa-se, simultaneamente, o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o dos números complexos $\mathbb{C}$. Por $\mathbb{N}$ denota-se o conjunto dos números naturais $\{1, 2, ...\}$ e por $\mathbb{Z}$ o dos inteiros.

Considere-se um número natural n, qualquer. Denota-se por $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ as n-uplas constituídas por números inteiros não negativos. Estas n-uplas são denominadas *multi-índices*.

Dados o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\,, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\, z_2^{\alpha_2} \ldots\, z_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1!\, \alpha_2! \,\ldots\, \alpha_n!\,, \quad 0! = 1.$$

Por D^α denota-se o operador de derivação de ordem α definido por

$$\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}\,, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

e para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ define-se $D^0 u = u$ para toda função u. Por D_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, representa-se a derivação parcial $\partial/\partial x_i$.

Se α, β forem multi-índices, escreve-se $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_i \leq \alpha_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Quando u e v forem funções numéricas suficientemente deriváveis, tem-se a regra de Leibniz dada por

$$D^{\alpha}(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\,(D^{\beta}u)(D^{\alpha-\beta}\,v).$$

Sejam E e F dois espaços topológicos com $E \subset F$. Para indicar que a imersão de E em F é contínua será usada a notação $E \hookrightarrow F$.

Por Ω representa-se um subconjunto aberto não vazio do $\mathbb{R}^n$ e por Γ sua fronteira. Será fixada em Ω a medida de Lebesgue dx.

Para facilitar a escrita, quando não houver lugar a imprecisões, as sucessões de objetos serão simplesmente denotadas, por exemplo, por (φ_μ) no lugar de $(\varphi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$, em certas ocasiões.

Espaço de Funções Testes

Inicia-se introduzindo alguns resultados e noções prévias.

1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$ e Convolução de Funções

Tem-se os seguintes resultados prévios:

Observação 1.1. *Para todo conjunto aberto Ω do $\mathbb{R}^n$, pode-se construir uma sucessão de conjuntos compactos $(K_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\operatorname{int}(K_\mu) \subset K_{\mu+1},\ \forall \mu \geq 1 \qquad e \qquad \Omega = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} K_\mu = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \operatorname{int}(K_\mu)\,.$$

sendo int K_μ o interior de K_μ .

Com efeito, é suficiente considerar K_μ como sendo

$$K_\mu = \left\{x \in \Omega;\ \ dist\,(x,\Gamma) \geq \frac{1}{\mu}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq \mu\}\,,$$

onde Γ é a fronteira de Ω.

Seja u uma função numérica definida em Ω, u mensurável, e seja $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i$ de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$. Considera-se o subconjunto aberto $\mathcal{O} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Então

$$u = 0 \text{ quase sempre em } \mathcal{O}.$$

Com efeito, se I for enumerável o resultado segue direto. Caso contrário, considera-se a sucessão $(K_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ da Observação 1.1. Como $K_\mu \subset \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$ e K_μ é compacto segue-se que int $(K_\mu) \subset \bigcup\limits_{i\in I_\mu} \mathcal{O}_i$, I_μ finito, portanto $u = 0$ quase sempre em int (K_μ), $\forall\ \mu \in \mathbb{N}$. Decorre daí que o segundo caso pode ser reduzido ao primeiro.

Como conseqüência do fato anterior, define-se o *suporte* de u, que será denotado por supp u, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$\text{supp } u = \Omega \setminus \mathcal{O}\ .$$

Observe que se u é contínua em Ω então

$$\text{supp } u \ \text{ é igual ao fecho em } \Omega \text{ do conjunto } \ \{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}.$$

Sejam u e v funções numéricas, mensuráveis em Ω e $\lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda \neq 0$. Mostra-se que:

$$\operatorname{supp}(u+v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v,$$

$$\operatorname{supp}(uv) \subset \operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v,$$

$$\operatorname{supp}(\lambda u) = \operatorname{supp} u.$$

Seja u uma função numérica, mensurável no $\mathbb{R}^n$. A função $\tau_y u$ definida por $(\tau_y u)(x) = u(x-y)$ denomina-se a *translação de u por y*. Mostra-se que

$$\operatorname{supp}(\tau_y u) = y + \operatorname{supp} u.$$

Representa-se por $L^p(\Omega),\ \ 1 \le p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções numéricas u definidas em Ω, mensuráveis, cuja potência p, $\ |u|^p$, é integrável à Lebesgue em Ω, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = 2$, $\ L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\bar{v}(x)\, dx, \quad \bar{v} \text{ complexo conjugado de } v.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço de Banach das (classes de) funções numéricas u, mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |u(x)|.$$

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$, o espaço localmente convexo das (classes de) funções numéricas u, mensuráveis em Ω, equipado com a família de semi-normas

$$\{p_{\mathcal{O}}\ ;\ \mathcal{O} \text{ subconjunto aberto limitado de } \Omega\}$$

onde

$$p_{\mathcal{O}}(u) = \left(\int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Diz-se que a sucessão (u_μ) de funções de $L^p_{loc}(\Omega)$ converge para zero em $L^p_{loc}(\Omega)$ se

$$\lim_{\mu \to \infty} p_{\mathcal{O}}(u_\mu) = 0 \quad \text{para todo } \mathcal{O} \text{ aberto limitado de } \Omega.$$

Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ e (u_μ) uma sucessão de funções de $L^p_{loc}(\Omega)$. Diz-se que (u_μ) converge para u em $L^p_{loc}(\Omega)$ se $(u_\mu - u)$ converge para zero em $L^p_{loc}(\Omega)$.

Note, pela Observação 1.1, que para definir o espaço $L^p_{loc}(\Omega)$ é suficiente considerar a sucessão de semi-normas $\left(p_{K_\mu}\right)_{\mu \geq 1}$ com

$$p_{K_\mu}(u) = \left(\int_{K_\mu} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

onde $\operatorname{int}(K_\mu) \subset K_{\mu+1}$, $\mu \geq 1$, e $\Omega = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} K_\mu$.

Proposição 1.1. *(Desigualdade de Interpolação). Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \ \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \tag{1.1}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Se $p = q$ então $0 \leq \theta \leq 1$; se $r = p,\ \theta = 1$ e se $r = q,\ \theta = 0$. Nestes três casos tem-se uma igualdade em (1.1).

Considere-se o caso $1 \leq p < r < q < \infty$. Observe que neste caso $0 < \theta < 1$. Tem-se, pela desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|^r \, dx &= \int_\Omega |u(x)|^{r\theta} |u(x)|^{r(1-\theta)} \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^{r\theta\alpha} \, dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_\Omega |u(x)|^{r(1-\theta)\alpha'} \, dx \right)^{1/\alpha'} \end{aligned} \tag{1.2}$$

com $\alpha = p/r\theta, \;\; \alpha' = q/r(1-\theta)$, sendo $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha'} = 1$. De (1.2) resulta

$$\int_\Omega |u(x)|^r \; dx \leq \|u\|^{p/\alpha}_{L^p(\Omega)} \;\; \|u\|^{q/\alpha'}_{L^q(\Omega)} \; .$$

Daí, notando que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta\alpha}{p}$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{(1-\theta)\,\alpha'}{q}$, obtém-se a desigualdade (1.1).

No caso $1 \leq p < r < \infty$, segue-se que $p = r\theta$ e $0 < \theta < 1$. Portanto

$$\int_\Omega |u(x)|^r \; dx = \int_\Omega |u(x)|^{r\theta + r(1-\theta)} \; dx \leq \|u\|^{r(1-\theta)}_{L^\infty(\Omega)} \;\; \|u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

implicando na desigualdade (1.1). ■

Sejam u e v funções numéricas definidas no $\mathbb{R}^n$. Considera-se a *convolução* $u * v$ das funções u e v, definidas por

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, v(x-y) \; dy.$$

Tem-se o seguinte resultado:

Proposição 1.2. *(Desigualdade de Young). Sejam* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, *e* r *o número real verificando* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \geq 0$. *Então* $u * v \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \;\; \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \; . \tag{1.3}$$

Além disso,

$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}. \tag{1.4}$$

1.1.1 Exemplos de Funções Testes

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas definidas em Ω, com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os objetos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados *funções testes em* Ω.

Exemplo 1.1 Seja $\rho \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\rho(x) = \left| \begin{array}{ll} \exp\left(-1 \left/ (1 - \|x\|^2)\right.\right) & \text{se } \;\|x\| < 1 \\ 0 & \text{se } \;\|x\| \geq 1 \end{array} \right.$$

sendo $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, então ρ pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{supp} \rho = \{x \in \mathbb{R}^n; \; \|x\| \leq 1\}$.

A afirmação anterior é conseqüência da argumentação que se segue: considere a função real

$$a(t) = \left| \begin{array}{cc} \exp\left(-\dfrac{1}{t}\right) & \text{se } \ t > 0 \\ 0 & \text{se } \ t \leq 0. \end{array} \right.$$

Claramente a função a é contínua em $\mathbb{R}$. Também é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e

$$a'(t) = \left| \begin{array}{cc} \dfrac{1}{t^2}\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right) & \text{se } \ t > 0 \\ 0 & \text{se } \ t < 0. \end{array} \right.$$

Tem-se:

$$\lim_{t \to 0^+} a'(t) = \lim_{\tau \to +\infty} \tau^2 \exp(-\tau) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^-} a'(t) = 0$$

logo a é diferenciável em $t = 0$ e $a'(0) = 0$. De forma análoga, para a j -ésima derivada de a em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ resulta

$$a^{(j)}(t) = \left| \begin{array}{cc} p\left(-\dfrac{1}{t}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right) & \text{se } \ t > 0 \\ 0 & \text{se } \ t < 0 \end{array} \right.$$

onde $p\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ é um polinômio em $-\dfrac{1}{t}$. Também

$$\lim_{t \to 0^+} a^{(j)}(t) = \lim_{\tau \to +\infty} p(-\tau)\exp(-\tau) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^-} a^{(j)}(t) = 0$$

portanto a é j -diferenciável em $t = 0$ e $a^{(j)}(0) = 0$. Como a escolha de $j \in \mathbb{N}$ foi arbitrária, segue-se que $a \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Considere agora a função $b(x) = 1 - \|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, que é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$. Tem-se:

$$\rho(x) = a(b(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Decorre do exposto acima que $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{supp}\rho = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq 1\}$. ■

A demonstração acima foi obtida de L. Nachbin, Teoria das Distribuições, Notas de Aula, IM-UFRJ, 1974.

Exemplo 1.2. Seja $k = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx$ sendo ρ a função do Exemplo 1.1. Para cada $\mu = 1, 2, \ldots$ considere a função $\rho_\mu \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho_\mu(x) = (\mu^n/k)\rho(\mu x) \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostra-se que ρ_μ é, para cada μ, uma função teste no $\mathbb{R}^n$ possuindo as seguintes propriedades:

a) $0 \leq \rho_\mu(x) \leq (\mu^n/k)\, e^{-1}$,

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\mu(x)\, dx = \int_{\overline{B_0(1/\mu)}} \rho_\mu(x)\, dx = 1$,

c) $\operatorname{supp}(\rho_\mu) = \overline{B_0\,(1/\mu)} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1/\mu\}$.

Uma sucessão $(\rho_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de funções testes no $\mathbb{R}^n$ com as propriedades **a)**, **b)**, **c)** é denominada uma *sucessão regularizante*.

Note que as funções ρ_μ, à medida que μ cresce, tem suportes cada vez menores, mas preservam o valor constante igual a um de suas integrais em $\mathbb{R}^n$. Quando $\mu \to \infty$, essa funções concentram-se na origem.

Exemplo 1.3. Sejam $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$. Então $u * v$ pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Quando v possui suporte compacto, então, por (1.4), $u * v$ é uma função teste no $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.4. Considere-se dois subconjuntos K e F do $\mathbb{R}^n$, disjuntos, sendo K compacto e F fechado. Então existe uma função teste φ no $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(x) = 1 \text{ em } K,\ \ \varphi(x) = 0 \text{ em } F \ \text{ e } \ 0 \leq \varphi(x) \leq 1.$$

Para construir tal φ considere $\varepsilon > 0$ definido por $\varepsilon = \operatorname{dist}(K, F)/4$ e construa os conjuntos $F_0 = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \operatorname{dist}(x, K) \geq 2\varepsilon\}$, $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \operatorname{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$. Considere $\mu \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon\mu \geq 1$. Então se $v\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $v(x) = \operatorname{dist}(x, F_0)\,/(\operatorname{dist}(x, F_0) + \operatorname{dist}(x, K_0))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, segue-se que $\varphi = \rho_\mu * v$ satisfaz todas as condições requeridas.

1.1.2 Regularização de Funções

O objetivo nesta seção é mostrar que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$. Inicia-se, para isto, com um resultado de continuidade.

Proposição 1.3. $L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$. *Então a aplicação translação*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \\ y &\longmapsto \tau_y u, \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração: Note-se que é suficiente demonstrar que a aplicação é contínua em $y = 0$. Com efeito, seja $y \in \mathbb{R}^n$ e (y_μ) uma sucessão de vetores de $\mathbb{R}^n$ com $y_\mu \to y$. Tem-se:

$$\left\|\tau_{y_\mu} u - \tau_y u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - y_\mu) - u(x - y)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - z_\mu) - u(x)|^p \, dx$$

onde $z_\mu = y_\mu - y \to 0$.

Provar-se-á, portanto, que a translação é contínua em $y = 0$. Seja (y_μ) uma sucessão de vetores do $\mathbb{R}^n$ com $y_\mu \to 0$. Primeiro mostra-se a continuidade para $u = \chi_{\mathcal{O}}$ onde $\chi_{\mathcal{O}}$ é a função característica de um subconjunto aberto limitado $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$. Tem-se:

$$\left\|\tau_{y_\mu} u - u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{\mathcal{O}}(x - y_\mu) - \chi_{\mathcal{O}}(x)|^p \, dx. \tag{1.5}$$

Observe que $\chi_{\mathcal{O}}(x - y_\mu) \to \chi_{\mathcal{O}}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \partial\mathcal{O}$ ($\partial\mathcal{O}$ fronteira de $\mathcal{O}$), logo

$$\chi_{\mathcal{O}}(x - y_\mu) \to \chi_{\mathcal{O}}(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Por outro lado

$$|\chi_{\mathcal{O}}(x - y_\mu) - \chi_{\mathcal{O}}(x)|^p \leq \chi_U(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

onde U é o conjunto $U = \left(\bigcup\limits_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{O} + y_\mu\right) \bigcup \mathcal{O}$, U aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue à integral da direita de (1.5), decorre de (1.6) e (1.7) que

$$\tau_{y_\mu} u \to u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ quando } \mu \to \infty.$$

Resulta da primeira parte que a translação é contínua em $y = 0$ para u função escada de $\mathbb{R}^n$, isto é, para u igual a uma combinação linear finita de funções características de subconjuntos abertos limitados de $\mathbb{R}^n$.

Note-se que o conjunto das funções escadas do $\mathbb{R}^n$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$. Então existe uma função escada ψ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\|u - \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \left\|\tau_{y_\mu} u - u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\|\tau_{y_\mu} u - \tau_{y_\mu}\psi\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\tau_{y_\mu}\psi - \psi\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\psi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \\ &= 2\,\|\psi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\tau_{y_\mu}\psi - \psi\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < 3\varepsilon \text{ para } \mu \geq \mu_0 \end{aligned}$$

que prova, finalmente, o resultado desejado. ■

Teorema 1.1. *Seja $(\rho_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ a sucessão regularizante dada no Exemplo 1.2. Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, então a sucessão $(\rho_\mu * u)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para u em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Tem-se:

$$(\rho_\mu * u)(x) - u(x) = \int_{\|y\| \leq 1/\mu} \rho_\mu(y) \{u(x-y) - u(x)\}\, dy \tag{1.8}$$

pois $\int_{\|y\| \leq 1/\mu} \rho_\mu(y)\, dy = 1$. Se $p = 1$, do Teorema de Fubini, resulta

$$\|\rho_\mu * u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\|y\| \leq 1/\mu} \rho_\mu(y) \|\tau_y u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\, dy,$$

e o Teorema 1.1 é uma conseqüência da continuidade da translação $\tau_y u$ demonstrada na Proposição 1.3.

No caso $1 < p < \infty$, considere q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De (1.8) e da desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$|(\rho_\mu * u)(x) - u(x)|^p \leq \left\{ \int_{\|y\| \leq 1/\mu} \rho_\mu(y)^q dy \right\}^{p/q} \int_{\|y\| \leq 1/\mu} |u(x-y) - u(x)|^p\, dy. \tag{1.9}$$

Note que

$$\int_{\|y\| \leq 1/\mu} \rho_\mu(y)^q\, dy \leq \frac{\mu^{nq}}{k^q e^q} \int_{\|y\| \leq 1/\mu} dy = \frac{\mu^{nq}}{k^q e^q}\, w_n\, \frac{1}{\mu^n}$$

onde w_n é o volume da esfera unitária do $\mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\left(\int_{\|y\| \leq 1/\mu} \rho_\mu(y)^q\, dy \right)^{p/q} \leq \frac{w_n^{p/q}}{k^p e^p}\, \mu^{(nq-n)p/q} = C\, \mu^{np(1-\frac{1}{q})} = C\, \mu^n \tag{1.10}$$

onde $C = w_n^{p/q} / k^p e^p$. Considerando (1.10) em (1.9) e aplicando o Teorema de Fubini, resulta

$$\|\rho_\mu * u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \mu^n \int_{\|y\| \leq 1/\mu} \|\tau_y u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dy \leq C\, w_n \sup_{\|y\| \leq 1/\mu} \|\tau_y u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Esta expressão e a continuidade da translação acarretam o Teorema 1.1. ∎

Corolário 1.1. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Seja $(K_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ a sucessão de subconjuntos compactos de Ω dada na Observação 1.1. Se $u \in L^p(\Omega)$, para cada $\mu = 1, 2, \ldots$ seja χ_{K_μ} a função característica de K_μ e considere a função $u_\mu = u\, \chi_{K_\mu}$. Segue-se que $u_\mu \in L^p(\Omega)$ para cada μ e a sucessão $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ é convergente para u na norma $L^p(\Omega)$, convergência que decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Desde que as funções u_μ possuem suporte compacto, para provar o corolário é suficiente aproximar as funções u_μ por funções de $C_0^\infty(\Omega)$.

De fato, seja $u \in L^p(\Omega)$, u com suporte compacto, e considere $r = \text{dist}\,(\text{supp}\,(u)\,, \Gamma)$, que é um número positivo. Defina $\tilde{u}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$\tilde{u}(x) = \left|\begin{array}{ll} u(x) & \text{se } \ x \in \Omega \\ 0 & \text{se } \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \,. \end{array}\right.$$

Diz-se que $\tilde{u}$ é a extensão de u por zero fora de Ω. Tem-se $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}\,\tilde{u} = \text{supp}\,u$ é um compacto de $\mathbb{R}^n$. Portanto, $(\rho_\mu * \tilde{u})_{\mu\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$ que converge para $\tilde{u}$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Represente por v_μ a restrição a Ω da função $\rho_\mu * \tilde{u}$. Resulta que v_μ é uma função teste em Ω para cada $\mu \geq 2/r$ e a sucessão $(v_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para u em $L^p(\Omega)$. ■

1.1.3 Convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$

Diz-se que uma sucessão (φ_μ) de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:

a) Os suportes de todas as funções testes φ_μ, da sucessão dada, estão contidos num compacto fixo K.

b) Para cada multi-índice α, a sucessão $(D^\alpha \varphi_\mu)$ converge para zero uniformemente em K.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, diz-se que a sucessão (φ_μ) de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty\,(\Omega)$, quando a sucessão $(\varphi_\mu - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}\,(\Omega)$ e denominado *espaço das funções testes* em Ω.

1.2 Distribuições sobre um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$

Define-se como *distribuição sobre* Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}\,(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}\,(\Omega)$. Isto significa que para toda sucessão (φ_μ) de $\mathcal{D}\,(\Omega)$, convergente para zero no sentido definido na seção 1.1.3, então a sucessão $(\langle T, \varphi_\mu\rangle)$ converge para zero em $\mathbb{K}$ (Note que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\langle T, \varphi_\mu\rangle$ é o valor de T em φ_μ). O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial o qual representa-se por $\mathcal{D}'\,(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão (T_μ)

de vetores de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para zero em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando, para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a sucessão $(\langle T_\mu, \varphi\rangle)$ converge para zero em $\mathbb{K}$. Neste caso escreve-se $\lim\limits_{\mu\to\infty} T_\mu = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Diz-se que

$$\lim_{\mu\to\infty} T_\mu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando $\lim\limits_{\mu\to\infty} (T_\mu - T) = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

O espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denominado *espaço das distribuições sobre* Ω.

Exemplo 1.5. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Considere a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por:

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\; dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Mostra-se sem dificuldades que T_u é uma distribuição sobre Ω.

Proposição 1.4. *(Lema de Du Bois-Reymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Claramente se $u = 0$ quase sempre em Ω então $T_u = 0$. Mostra-se, então, que a condição $T_u = 0$ implica $u = 0$ quase sempre em Ω. Com efeito, considere-se um subconjunto aberto limitado $\mathcal{O}$ de Ω. Sabe-se pelo Corolário 1.1 da Seção 1.1.2 que $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ é denso em $L^1(\mathcal{O})$. Conseqüentemente, como $u \in L^1(\mathcal{O})$, vem que para cada $\varepsilon > 0$ existe $v \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ tal que

$$\int_{\mathcal{O}} |u(x) - v(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Da hipótese e desta última desigualdade, resulta:

$$\left|\int_{\mathcal{O}} v(x)\,\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_{\mathcal{O}} (v(x)\,\varphi(x) - u(x)\,\varphi(x))\; dx\right| \le \varepsilon\, \text{máx}\, |\varphi(x)| \qquad (1.11)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Considere-se os conjuntos

$$K_1 = \{x \in \mathcal{O}; v(x) \ge \varepsilon\} \;\text{ e }\; K_2 = \{x \in \mathcal{O}; v(x) \le -\varepsilon\},$$

que são subconjuntos compactos disjuntos de $\mathcal{O}$. Do Exemplo 1.4 da Seção 1.1.1 do Capítulo 1, vem que existem φ_1, φ_2 em $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ tais que:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = 1 \text{ em } K_1 & \varphi_1 = 0 \text{ em } K_2 & 0 \le \varphi_1 \le 1; \\ \varphi_2 = 0 \text{ em } K_1 & \varphi_2 = 1 \text{ em } K_2 & 0 \le \varphi_2 \le 1. \end{array}$$

Tomando-se $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, obtém-se:

$$\psi = 1 \text{ em } K_1\,, \quad \psi = -1 \text{ em } K_2\,, \quad -1 \leq \psi \leq 1.$$

Resulta, portanto,

$$\int_{\mathcal{O}} v\,(x)\,\psi\,(x)\,dx = \int_{\mathcal{O}\backslash K} v\,(x)\,\psi\,(x)\,dx + \int_K v\,(x)\,\psi\,(x)\,dx,$$

onde $K = K_1 \cup K_2$. Observando-se que $|v\,(x)| \leq \varepsilon$ em $\mathcal{O}\backslash K$ e levando em consideração (1.11) obtém-se:

$$\left|\int_K v\,(x)\,\psi\,(x)\,dx\right| \leq \left|\int_{\mathcal{O}} v\,(x)\,\psi\,(x)\,dx\right| + \left|\int_{\mathcal{O}\backslash K} v\,(x)\,\psi\,(x)\,dx\right| \leq \varepsilon + \varepsilon \text{ med}(\mathcal{O}).$$

Da definição de ψ e desta última desigualdade, encontra-se:

$$\int_K |v\,(x)|\,dx = \int_K |v\,(x)\,\psi\,(x)|\,dx \leq \varepsilon + \varepsilon \text{ med}(\mathcal{O}).$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{O}} |u\,(x)|\,dx \leq \int_{\mathcal{O}} |u\,(x) - v\,(x)|\,dx + \int_K |v\,(x)|\,dx + \int_{\mathcal{O}\backslash K} |v\,(x)|\,dx \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon \text{ med}(\mathcal{O}).$$

Fazendo-se ε tender para zero obtém-se que $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}$. Sendo $\mathcal{O}$ arbitrário, resulta que $u = 0$ quase sempre em Ω.

A demonstração acima é válida para u tomando valores reais. Se u toma valores complexos, observa-se que a condição $\int_\Omega u\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx = 0$ para toda φ em $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, implica

$$\int_\Omega (\operatorname{Re} u\,(x))\,\varphi\,(x)\;dx = 0, \quad \int_\Omega (\operatorname{Im}\, u\,(x))\,\varphi\,(x)\,dx = 0, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$
$$\varphi \text{ uma função real.}$$

A proposição segue aplicando a demonstração feita acima a cada uma destas integrais.

■

Observação 1.2. Do Lema de Du Bois-Reymond segue-se que para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, tem-se T_u univocamente determinada por u sobre Ω, quase sempre, no seguinte sentido: se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ então $T_u = T_v$ se e somente se $u = v$ quase sempre em Ω. Por esta razão, identifica-se u com a distribuição T_u por ela definida e diz-se a distribuição u ao invés de dizer a distribuição T_u.

É oportuno observar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo que se segue.

Exemplo 1.6. Seja x_0 um ponto de Ω e δ_{x_0} a forma linear definida em $D(\Omega)$ do seguinte modo:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi\left(x_0\right) \quad \textit{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Fácil é verificar que δ_{x_0} é uma distribuição sobre Ω, denominada distribuição de Dirac ou medida de Dirac concentrada em x_0. Quando $x_0 = 0$ escreve-se δ_0 .

Mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função u de $L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u\left(x\right)\varphi\left(x\right)\,dx = \varphi\left(x_0\right) \quad \textit{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, se existisse uma tal função u, então para $\psi = \left\|x - x_0\right\|^2 \varphi \in D\left(\Omega\right)$ resulta

$$\int_\Omega u\left(x\right)\left\|x - x_0\right\|^2\,\varphi\left(x\right)\,dx = \left\|x - x_0\right\|^2\,\varphi\left(x\right)\Big|_{x=x_0} = 0,$$

para toda $\varphi \in D(\Omega)$. Pelo Lema de Du Bois-Reymond (Proposição 1.4) tem-se $\left\|x - x_0\right\|^2 u\left(x\right) = 0$ quase sempre em Ω, mostrando que $u(x) = 0$ quase sempre em Ω, isto é, $\delta_{x_0} = 0$ o que é uma contradição.

Observação 1.3. Existem sucessões (u_μ) de funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ que convergem para distribuições T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, mas o limite T pode não ser definido por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.

De fato, seja $x_0 \in \Omega$ e $\overline{B_r\left(x_0\right)} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leq r\}$ uma bola contida em Ω. Para cada $0 < \varepsilon < r$, seja θ_ε a função teste

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{k\varepsilon^n}\,\rho\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega,$$

sendo ρ a função teste definida no Exemplo 1.1 da Seção 1.1.1 do Capítulo 1, e $k = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\,dy$. Tem-se, para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle \theta_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{1}{k\varepsilon^n}\int_\Omega \rho\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx = \frac{1}{k}\int_{\overline{B_1(0)}} \rho(y)\varphi(\varepsilon y + x_0)dy \to \varphi(x_0)$$

quando $\varepsilon \to 0^+$.

Assim
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\theta_\varepsilon = \delta_{x_0} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Exemplo 1.7. Seja (u_μ) uma sucessão de funções de $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$; tal que
$$\lim_{\mu\to\infty} u_\mu = u \quad \text{em} \quad L^p_{loc}(\Omega).$$

Então resulta que
$$\lim_{\mu\to\infty} u_\mu = u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

De fato, seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto limitado de Ω tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathcal{O}$. Se $p = 1$, tem-se:
$$|\langle u_\mu - u, \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega (u_\mu(x) - u(x))\,\varphi(x)dx\right| \leq \max_{x\in\mathcal{O}} |\varphi(x)| \int_{\mathcal{O}} |u_\mu(x) - u(x)|\, dx,$$

e se $1 < p < \infty$, considera-se o seu conjugado q, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, obtendo-se:
$$|\langle u_\mu - u, \varphi\rangle| \leq \|u_\mu - u\|_{L^p(\mathcal{O})}\, \|\varphi\|_{L^q(\mathcal{O})}\,.$$

As desigualdades acima implicam nossa afirmação.

Observação 1.4. Tem-se a seguinte cadeia, para $1 \leq p < \infty$,
$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

sendo cada inclusão densa na seguinte.

Com efeito, a continuidade da imersão de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^p_{loc}(\Omega)$ é fácil de verificar e a continuidade da imersão de $L^p_{loc}(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ foi mostrada no Exemplo 1.7. A densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ será provada posteriormente na Proposição 2.16 do Capítulo 2. Para mostrar que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p_{loc}(\Omega)$, procede-se como se segue. Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ e $(K_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ a sucessão de subconjuntos compactos de Ω dada na Observação 1.1. Para cada aberto $\mathcal{O}_\mu = \operatorname{int} K_\mu$ determina-se $\varphi_\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_\mu)$ tal que
$$\|u - \varphi_\mu\|_{L^p(\mathcal{O}_\mu)} < \frac{1}{\mu}\,.$$

A sucessão $(\varphi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de funções testes em Ω converge para u em $L^p_{loc}(\Omega)$ quando $\mu \to \infty$. ■

Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A *derivada de ordem α de T* é, por definição, a forma linear $D^\alpha T$ definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por:
$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\, \langle T, D^\alpha\varphi\rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Não é difícil mostrar que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.

Segue-se da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim, as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} D^\alpha : & \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ & T & \longmapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\mu\to\infty} T_\mu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{\mu\to\infty} D^\alpha T_\mu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Note que o operador linear $\dfrac{d}{dt}$ de $L^2(0,1)$ em $L^2(0,1)$ com domínio $C^1([0,1])$ não é contínuo. Com efeito, o conjunto

$$\left\{u(t) = e^{int},\, n = 1, 2, ...\right\}$$

é limitado em $L^2(0,1)$ e sua imagem por $\dfrac{d}{dt}$ não é limitado em $L^2(0,1)$.

Outro resultado que vale a pena mencionar é que a derivada de uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo que vem a seguir. Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev, tendo este texto como um dos objetivos fazer um estudo introdutório destes espaços.

Exemplo 1.8. Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma: $u(x) = 1$ se $x > 0$ e $u(x) = 0$ se $x \le 0$. Ela pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. De fato, tem-se:

$$\langle u', \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.9. Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \le k$, a derivada $D^\alpha u$ no sentido das distribuições é igual à derivada no sentido clássico, isto é, $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$ para todo $|\alpha| \le k$. Isto é uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

Exemplo 1.10. Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $k \in \mathbb{N}$. Suponha que para cada $|\alpha| \le k$, $D^\alpha u$ pertença a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então, para toda φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $|\alpha| \le k$, tem-se:

$$D^\alpha(\varphi * u) = \varphi * D^\alpha u.$$

Note que $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições. A igualdade acima é uma conseqüência da definição de derivada e do Teorema de Fubini.

A seguir serão fixados certos resultados sobre multiplicação de uma distribuição por uma função, restrição de uma distribuição, distribuição temperada e transformada de Fourier.

1.2.1 Produto de Funções por Distribuições

Se $\rho \in C^\infty(\Omega)$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tem-se $\rho\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e se $\lim\limits_{\mu\to\infty} \varphi_\mu = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ isto implica $\lim\limits_{\mu\to\infty} \rho\varphi_\mu = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ (segue-se da Fórmula de Leibniz para funções). Quando T é uma distribuição sobre Ω, define-se o produto ρT como a forma linear definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ do seguinte modo:

$$\langle \rho T, \varphi\rangle = \langle T, \rho\varphi\rangle \quad \text{para toda} \quad \varphi \quad \text{em} \quad \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue-se que ρT é uma distribuição sobre Ω.

Se α é um multi-índice, tem-se a fórmula de Leibniz:

$$D^\alpha(\rho T) = \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\, D^\beta \rho\, D^{\alpha-\beta}\, T.$$

Verificar-se-á esta fórmula no caso $\alpha = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Para todo φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle D_i(\rho T), \varphi\rangle &= -\langle \rho T, D_i\varphi\rangle = -\langle T, \rho\,(D_i\varphi)\rangle = \langle T, -D_i(\rho\varphi) + (D_i\rho)\,\varphi\rangle = \\ &= -\langle T, D_i(\rho\varphi)\rangle + \langle T, (D_i\rho)\,\varphi\rangle = \langle D_i T, \rho\varphi\rangle + \langle (D_i\rho)\,T, \varphi\rangle = \\ &= \langle \rho D_i T + (D_i\rho)\,T, \varphi\rangle\,. \end{aligned}$$

1.2.2 Restrição de Distribuições

Suponha Ω e U subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ tais que $\Omega \subset U$. Para cada função φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ considere-se $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ se $x \in \Omega$ e $\widetilde{\varphi}(x) = 0$ se $x \in U \setminus \Omega$. Tem-se $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(U)$ e mais:

a) Se $\lim\limits_{\mu\to\infty} \varphi_\mu = 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, segue-se que $\lim\limits_{\mu\to\infty} \widetilde{\varphi}_\mu = 0$ em $\mathcal{D}(U)$;

b) $D^\alpha \widetilde{\varphi} = \widetilde{D^\alpha \varphi}$ para todo multi-índice α.

Como uma conseqüência desses resultados, se $T \in \mathcal{D}'(U)$, a forma linear $T\big|_\Omega$ definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por $\left\langle T\big|_\Omega, \varphi\right\rangle = \langle T, \widetilde{\varphi}\rangle$ para todo φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, é uma distribuição sobre Ω denominada a restrição de T a Ω. De a) prova-se que $T\big|_\Omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e de b), que $D^\alpha\left(T\big|_\Omega\right) = (D^\alpha T)\big|_\Omega$.

1.2.3 Distribuições Temperadas

Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ diz-se *rapidamente decrescente no infinito*, quando para cada k inteiro não negativo tem-se

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^k \, |D^\alpha \varphi(x)| < \infty, \tag{1.12}$$

que é equivalente a dizer que

$$\lim_{||x||\to\infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0 \tag{1.13}$$

para todo polinômio p de n variáveis reais e multi-índice α.

Considere o espaço vetorial $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ das funções rapidamente decrescentes no infinito, no qual definiremos a seguinte noção de convergência: uma sucessão (φ_μ) de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para zero quando, para todo inteiro não negativo k, a sucessão $(p_k(\varphi_\mu))$ converge para zero em $\mathbb{K}$. A sucessão (φ_μ) converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $(p_k(\varphi_\mu - \varphi))$ converge para zero em $\mathbb{K}$ para todo k inteiro não negativo.

As formas lineares definidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, contínuas no sentido da convergência definida em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são denominadas *distribuições temperadas*. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual de sucessões será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Assim

$$\lim_{\mu\to\infty} T_\mu = T \quad \text{em} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{se} \quad \lim_{\mu\to\infty} \langle T_\mu, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\,, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Tem-se $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. O espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\theta(x) = 1 \quad \text{se} \quad \|x\| \leq 1, \quad \theta(x) = 0 \quad \text{se} \quad \|x\| \geq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Para cada natural $\mu \geq 1$, define-se $\theta_\mu(x) = \theta(x/\mu)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então a sucessão $(\theta_\mu u)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge para u em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para mostrar a convergência observe que pela Fórmula de Leibniz para funções, resulta

$$\begin{aligned} D^\alpha\left(\theta_\mu(x)\, u(x)\right) - D^\alpha u(x) \;&= \left(\theta_\mu(x)\, D^\alpha u(x) - D^\alpha u(x)\right) + \\ &+ \sum_{0<\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \frac{1}{\mu^{|\beta|}} D^\beta \theta(x/\mu) D^{\alpha-\beta} u(x)\,. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} p_k\left(\theta_\mu u - u\right) \leq \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^k \left|\theta_\mu(x) D^\alpha u(x) - D^\alpha u(x)\right| + \\ + \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[\left(1 + \|x\|^2\right)^k \sum_{0<\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \frac{1}{\mu^{|\beta|}} \left| D^\beta \theta\left(x/\mu\right) D^{\alpha-\beta}\, u(x) \right| \right] \end{aligned} \tag{1.14}$$

A segunda parcela do segundo membro de (1.14) converge para zero quando $\mu \to \infty$ como pode ser visto facilmente. A primeira parcela converge para zero como conseqüência da expressão (1.13) e do fato que $\theta_\mu(x)D^\alpha u(x) = D^\alpha u(x)$ para $\|x\| \leq \mu$.

Observe-se que $u(x) = e^{-\|x\|^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mas não pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Como conseqüência do exposto vem que se T é uma distribuição temperada, sua restrição a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$, a qual ainda representa-se por T. Além disso, se S é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$ tal que existem $C > 0$ e k inteiro não negativo satisfazendo a condição:

$$|\langle S, \varphi\rangle| \leq C\, p_k(\varphi) \quad \text{para toda} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{1.15}$$

segue-se da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que S pode ser estendida como uma distribuição temperada.

Exemplo 1.11. Como $|\langle \delta_0, \varphi\rangle| \leq p_0(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ segue-se de (1.15) que $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.12. Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u\,(x)|}{\left(1 + \|x\|^2\right)^k}\, dx < \infty$$

para algum $k \in \mathbb{N}$. Então $|\langle u, \varphi\rangle| \leq C\, p_k(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Conseqüentemente, u é uma distribuição temperada.

Como conseqüência do Exemplo 1.12 e notando que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + \|x\|^2\right)^m}\, dx < \infty \quad \text{para} \quad m > n/2,$$

vem que toda $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\;1 \leq p \leq \infty$, define uma distribuição temperada. Para $1 < p < \infty$, tem-se:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}\,(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

sendo cada inclusão densa na seguinte. Então por dualidade resulta

$$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'\,(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{1.16}$$

com cada inclusão densa na seguinte.

Exemplo 1.13. Os polinômios p de n variáveis reais definem distribuições temperadas. Isto é uma conseqüência de (1.15).

Exemplo 1.14. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e α um multi-índice, então a forma linear $D^\alpha T$ definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

é uma distribuição temperada.

Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então o produto ρT não é necessariamente uma distribuição temperada. Isto pode ser visto considerando $\rho(x) = e^{2\|x\|^2}$ e $\varphi(x) = e^{-\|x\|^2}$ e notando que $\rho\varphi$ não pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Diz-se que ρ é *lentamente crescente no infinito*, quando para cada α multi-índice, existe um polinômio p_α, tal que

$$|\mathcal{D}^\alpha \rho(x)| \leq p_\alpha(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, se ρ é lentamente crescente no infinito, então ρT é uma distribuição temperada.

1.2.4 Transformada de Fourier

Dada uma função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, define-se sua transformada de Fourier como sendo a função $\mathcal{F}u$ definida no $\mathbb{R}^n$ por

$$(\mathcal{F}u)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}\, u(y)\, dy$$

sendo $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. A aplicação $(\widetilde{\mathcal{F}}u)(x) = (\mathcal{F}u)(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, é denominada transformada de Fourier inversa de u. Obtém-se $\overline{\mathcal{F}u} = \widetilde{\mathcal{F}}\bar{u}$, sendo $\bar{v}$ o complexo conjugado de v.

Desde que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, estão bem definidas $\mathcal{F}\varphi$, $\widetilde{\mathcal{F}}\varphi$ e mostra-se que elas são rapidamente decrescentes no infinito. Além disto

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{F}}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$.

Observe que $\mathcal{F}\, e^{-\|x\|^2/2} = e^{-\|x\|^2/2}$.

Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se:

$$\mathcal{F}(D^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}\, x^\alpha\, \mathcal{F}\varphi, \qquad D^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}\left((-i)^{|\alpha|}\, x^\alpha\, \varphi\right),$$
$$(\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\varphi, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\widetilde{\mathcal{F}}\varphi, \widetilde{\mathcal{F}}\psi\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Dada uma distribuição temperada T, define-se a sua transformada de Fourier do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \qquad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right), \\ \left\langle \widetilde{\mathcal{F}}T, \varphi \right\rangle &= \left\langle T, \widetilde{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle \qquad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right). \end{aligned}$$

Da continuidade da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue-se que $\mathcal{F}T$ e $\widetilde{\mathcal{F}}T$ são distribuições temperadas. Mostra-se que

$$\mathcal{F} \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{F}} \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos sendo $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$. Também

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = i^{|\alpha|}\, x^\alpha\, \mathcal{F}T, \quad D^\alpha(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}\left((-i)^{|\alpha|}\, x^\alpha\, T\right).$$

Observe que se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)\backslash L^1(\mathbb{R}^n)$ então a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}\, u(y)dy$ não está definida para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Para definir $\mathcal{F}u$, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, procede-se da seguinte forma: Primeiro mostra-se que

$$||\mathcal{F}\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Isto implica que quando $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é equipado com a norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\mathcal{F} \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria linear. A seguir, pela densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, estende-se $\mathcal{F}$ ao espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. Esta extensão ainda é denotada por $\mathcal{F}$. Assim, $\mathcal{F}u$ com $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$\mathcal{F}u = \lim_{\mu \to \infty} \mathcal{F}\varphi_\mu$$

onde o limite é tomado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e (φ_μ) é uma sucessão de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_\mu \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Análoga definição para $\widetilde{\mathcal{F}}u$, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pois também se tem

$$||\widetilde{\mathcal{F}}\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Tem-se o seguinte resultado:

Teorema 1.2. *(Plancherel). As aplicações*

$$\mathcal{F} \colon L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \widetilde{\mathcal{F}} \colon L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos de espaços de Hilbert tais que

$$(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\widetilde{\mathcal{F}}u, \widetilde{\mathcal{F}}v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

para todo par u, $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Serão usadas, também, as notações $\widehat{u}$ e $\breve{u}$ no lugar de $\mathcal{F}u$ e $\widetilde{\mathcal{F}}u$, respectivamente.
A demonstração dos resultados expostos nas duas últimas seções podem ser encontradas em K. Yosida [31].

Exercícios

1. Seja $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e $(\rho_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ uma sucessão regularizante em $\mathbb{R}^n$. Claramente $(\rho_\mu * u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostre que:

   i) $\rho_\mu * u \to u$ uniformemente nos compactos de $\mathbb{R}^n$ quando $\mu \to \infty$;

   ii) Se $n = 1$ e u é periódica com período $P > 0$ então $\rho_\mu * u$ é periódica com período P e $\rho_\mu * u \to u$ uniformemente em $\mathbb{R}$ quando $\mu \to \infty$.

2. Seja $u(x) = \log|x|$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, e $Vp\left(\dfrac{1}{x}\right) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\left\langle Vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

   Mostre que:

   i) $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

      - Sugestão: Use o fato que $|x|^\varepsilon\,|\log|x|| \to 0$ quando $|x| \to 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$;

   ii) $Vp\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$;

   iii) $\dfrac{d}{dx}\log|x| = Vp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Considere a sucessão de funções $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$, $u_\mu \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u_\mu(x) = \left|\begin{array}{lll} 0 & \text{se} & \|x\| \geq 1/\mu \\ \mu^{n+1} & \text{se} & \|x\| < 1/\mu. \end{array}\right.$$

   Prove que $u_\mu \to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ quando $\mu \to \infty$ e que $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ não converge em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

4. Seja $]a, b[$ um intervalo aberto finito da reta e A o operador d/dx com domínio $D(A) = \left\{ u \in L^2(a,b); \dfrac{du}{dx} \in L^2(a,b) \right\}$. Mostre que

$$A \colon D(A) \subset L^2(a,b) \longrightarrow L^2(a,b)$$

não é contínuo.

5. Prove que as expressões (1.12) e (1.13) da Seção 1.2.3 são equivalentes.

   - **Sugestão**: Primeiro mostre que (1.12) implica $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} x^\beta D^\alpha \varphi(x) = 0$. Para isto observe que $|a| \leq \frac{1}{2}\,(1 + a^2)$, para todo $a \in \mathbb{R}$, e que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^k \,|g(x)| < \infty$ implica $g(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$.

6. Seja $k \in \mathbb{N}$. Mostre que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \left(1 + \|x\|^2\right)^k \leq \sum_{|\alpha| \leq k} x^{2\alpha} \leq C_2 \left(1 + \|x\|^2\right)^k \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

7. Seja u a função característica do cubo U do $\mathbb{R}^n$:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Prove que $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mas $\mathcal{F}u \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

8. Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Mostre que

$$(\mathcal{F}u)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}\, u(y)\, dy.$$

Capítulo 2

Espaços de Sobolev

Introdução

Este é o capítulo fundamental deste texto, pois nele serão demonstrados os resultados básicos para aplicação às equações diferenciais parciais. Inicialmente introduz-se a noção de espaço de Sobolev e certas propriedades elementares são mencionadas. Com base nestes conceitos demonstra-se os teoremas de imersão, incluindo as imersões compactas; estuda-se o prolongamento; finalizando o capítulo com a demonstração de uma versão simples do teorema do traço e uma generalização do teorema de Green.

2.1 Propriedades Elementares dos Espaços de Sobolev

São estudadas nesta seção propriedades elementares da geometria dos espaços de Sobolev e alguns resultados simples de dualidade.

2.1.1 Geometria dos Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e m um inteiro não negativo. Se $u \in L^p(\Omega)$, foi visto no capítulo anterior, que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de u por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty;$$
$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |D^\alpha u(x)| \, .$$

Não é difícil verificar que a função $\|u\|_{m,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, é uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$. Os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ são denominados *espaços de Sobolev*.

Proposição 2.1. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja (u_μ) uma sucessão de Cauchy de vetores de $W^{m,p}(\Omega)$. Sendo $\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{m,p}$ para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$, segue-se que $(D^\alpha u_\mu)$ é uma sucessão de Cauchy do espaço de Banach $L^p(\Omega)$, então existe um vetor v_α de $L^p(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha u_\mu \to v_\alpha \quad \text{em} \quad L^p(\Omega) \, . \tag{2.1}$$

Quando $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, $u = v_\alpha$, então

$$u_\mu \to u \quad \text{em} \quad L^p(\Omega) \, . \tag{2.2}$$

Para provar a proposição é suficiente mostrar que $D^\alpha u = v_\alpha$ no sentido das distribuições, para todo $0 < |\alpha| \leq m$. Com efeito de (2.1) e (2.2) resulta

$$D^\alpha u_\mu \to v_\alpha \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \, , \qquad 0 < |\alpha| \leq m \tag{2.3}$$

e

$$u_\mu \to u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.4}$$

pois $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Como a derivação é contínua em $\mathcal{D}'(\Omega)$, obtém-se de (2.4):

$$D^\alpha u_\mu \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \, . \tag{2.5}$$

De (2.3), (2.5) e a unicidade dos limites em $\mathcal{D}'(\Omega)$ resulta $D^\alpha u = v_\alpha$, $0 < |\alpha| \leq m$, que mostra a proposição. ■

O caso particular $p = 2$ é útil nas aplicações e neste caso o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$. O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar dado por:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$. A norma deste espaço é denotada por:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_m .$$

O espaço $H^m(\Omega)$ é denominado *espaço de Sobolev de ordem m.*

2.1.2 O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Quando $m = 0$, tem-se $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e do Corolário 1.1 do Capítulo 1, sabe-se que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$, mas não é verdade que $\mathcal{D}(\Omega)$ seja sempre denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$, como será visto posteriormente. Motivado por este fato, define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Proposição 2.2. *Seja $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e $\tilde{u}$ a extensão de u por zero fora de Ω. Tem-se:*

a) $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$,

b) $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ *para todo* $|\alpha| \leq m$,

c) $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$.

Demonstração: Dada uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e as condições **a)–c)** são satisfeitas por φ. Segue-se que a função $\sigma\colon \mathcal{D}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria linear de espaços normados e pode ser estendida por continuidade a uma isometria linear $\tilde{\sigma}\colon W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ definida do seguinte modo: se $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e (φ_μ) é uma sucessão de funções testes em Ω tais que $\varphi_\mu \to u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$, então $\widetilde{\varphi}_\mu \to \tilde{\sigma} u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Mostra-se que $\tilde{\sigma} u = \tilde{u}$ para todo $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. De fato, se $\varphi_\mu \to u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$ então a sucessão $(\widetilde{\varphi}_\mu)$ converge para $\tilde{u}$ e também para $\tilde{\sigma} u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, logo $\tilde{u} = \tilde{\sigma} u$. Pelo mesmo argumento tem-se $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ para todo $|\alpha| \leq m$ o que prova a proposição. ■

Com base na proposição anterior, mostra-se que se Ω é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, pode acontecer que $W_0^{m,p}(\Omega)$ seja diferente de $W^{m,p}(\Omega)$.

Proposição 2.3. *Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω no $\mathbb{R}^n$, $\complement\, \Omega$, possui medida de Lebesgue igual a zero.*

Demonstração: Sejam U uma bola aberta do $\mathbb{R}^n$ tal que $U \cap \Omega \neq \phi$ e $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta = 1$ em $U \cap \Omega$. Considere $v = \theta|_\Omega$ então $v \in W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$, logo $\tilde{v} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e $D_i\tilde{v} = \widetilde{(D_i v)}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Seja $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Tem-se:

$$\int_U (D_i\tilde{v})\varphi\, dx = \int_{U \cap \complement\,\Omega} (D_i\tilde{v})\varphi\, dx + \int_{U\cap\Omega} (D_i\tilde{v})\varphi\, dx = \int_{U\cap\complement\Omega} (\widetilde{D_i v})\varphi\, dx = 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é, $D_i\tilde{v} = 0$ quase sempre em U para $i = 1, 2, \ldots, n$, logo $\tilde{v}|_U$ é uma distribuição definida por uma função constante. Conseqüentemente existe uma constante c tal que $A = \{x \in U; \tilde{v} \neq c\}$ é de medida zero. Como $\tilde{v}(x) = 1$ em $U \cap \Omega$, que é um aberto não vazio, tem-se $c = 1$, portanto $U \cap \complement\,\Omega \subset A$, donde $U \cap \complement\,\Omega$ tem medida zero para qualquer bola aberta U. De

$$\complement\,\Omega = \complement\,\Omega \cap \left[\bigcup_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(0)\right] = \bigcup_{\mu=1}^{\infty}[\complement\,\Omega \cap B_\mu(0)]$$

onde $B_\mu(0)$ é a bola aberta do $\mathbb{R}^n$ de centro em $x = 0$ e raio μ, segue-se que med $\complement\,\Omega = 0$ pois

$$\text{med }\complement\,\Omega \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} \text{med}[\complement\,\Omega \cap B_\mu(0)] = 0$$

e a demonstração da proposição está concluída. ■

Observe-se que a recíproca da Proposição 2.3 nem sempre é verdadeira, isto é, se $\complement\,\Omega$ ter medida de Lebesgue zero não implica, necessariamente que, $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. Para um estudo das condições necessárias e suficientes sobre $\complement\,\Omega$ para que se tenha $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ pode consultar-se J.L. Lions [13]. Segundo estes resultados observa-se que se $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \{x_0\}$, x_0 ponto de $\mathbb{R}^n$, e $mp > n$, $1 < p < \infty$, então $W_0^{m,p}(\Omega)$ está contido estritamente em $W^{m,p}(\Omega)$.

Resulta da Proposição 2.3 que se o complemento de Ω possui medida positiva, tem-se $W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$. Em particular, se Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, tem-se $W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$. No caso extremo $\Omega = \mathbb{R}^n$, tem-se $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, como uma conseqüência do seguinte teorema:

Teorema 2.1. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso no $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: A idéia da demonstração é primeiro aproximar os elementos de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ por elementos do mesmo espaço mas com suporte compacto. A seguir, aproximar os elementos de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto por funções testes em $\mathbb{R}^n$.

De fato, seja θ uma função teste no $\mathbb{R}^n$ tal que $\theta = 1$ sobre a bola fechada $\overline{B_1(0)}$, $\theta = 0$ fora da bola aberta $B_2(0)$ e $0 \leq \theta\,(x) \leq 1$. Para todo número natural $\mu \geq 1$, suponha $\theta_\mu(x) = \theta(x/\mu)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $(\theta_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções testes em $\mathbb{R}^n$ com as seguintes propriedades:

a) $\theta_\mu = 1$ sobre $\overline{B_\mu(0)}$, $\operatorname{supp}\theta_\mu \subset \overline{B_{2\mu}(0)}$ e $0 \le \theta_\mu(x) \le 1$.

b) Para todo α multi-índice, existe $M_\alpha > 0$ tal que:

$$|D^\alpha \theta_\mu(x)| \le M_\alpha / \mu^{|\alpha|}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{N}$.

Das partes **a)** e **b)** e do teorema de Lebesgue sobre a convergência limitada, para todo $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \theta_\mu v \to v \quad &\text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n), \\ (D^\alpha \theta_\mu) v \to 0 \quad &\text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n), \text{ se } \alpha \ne 0. \end{aligned}$$

Se $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, pela fórmula de Leibniz, tem-se:

$$D^\alpha(\theta_\mu u) = \theta_\mu D^\alpha u + \sum_{0<\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \left(D^\beta \theta_\mu\right)\left(D^{\alpha-\beta}\, u\right)$$

e dos limites acima, segue-se que para todo $0 < |\alpha| \le m$ a sucessão $\left(D^\alpha\left(\theta_\mu u\right)\right)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para $D^\alpha u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $(\theta_\mu u)_{\mu\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de vetores de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ convergente para u em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e além disto, $\theta_\mu u$ possui suporte compacto contido na bola $\overline{B_{2\mu}(0)}$.

Suponha agora que $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ seja tal que seu suporte seja compacto. Se (ρ_μ) é uma sucessão regularizante no $\mathbb{R}^n$, segue-se que $(\rho_\mu * u)$ é uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$. Além disto, para todo $|\alpha| \le m$, tem-se:

$$D^\alpha(\rho_\mu * u) = \rho_\mu * D^\alpha u.$$

Portanto,

$$D^\alpha(\rho_\mu * u) \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n),$$

como uma conseqüência do Teorema 1.1 do Capítulo 1 o que prova ser $\rho_\mu * u \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. ∎

A seguir faz-se um comentário relativo ao suporte de funções de $W^{m,p}(\Omega)$ o qual será usado na demonstração da próxima proposição.

Observação 2.1. Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Então, note-se que $\operatorname{supp}(D^\alpha u) \subset \operatorname{supp} u$, para todo $|\alpha| \le m$.

Com efeito, seja $\boldsymbol{O} = \{\mathcal{O}_i\,;\, i \in I\}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i$ de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$. Então, por definição, ver Seção 1.1 do Capítulo 1, $\operatorname{supp} u = \Omega \backslash \mathcal{O}$ onde $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$. A observação decorrerá se mostrarmos que $D^\alpha u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$, para todo $i \in I$, com $|\alpha| \leq m$. Tem-se, para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_i)$:

$$\int_{\mathcal{O}_i} (D^\alpha u(x))\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathcal{O}_i} u(x)\, D^\alpha \varphi(x)\,dx = 0$$

que implica, pelo Lema de Du Bois-Reymond (Proposição 1.4 do Capítulo 1), $D^\alpha u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$. ■

Quando Ω for um aberto arbitrário do $\mathbb{R}^n$, como foi provado, tem-se em geral $W^{m,p}(\Omega) \neq W_0^{m,p}(\Omega)$. Entretanto, o seguinte resultado caracteriza os elementos de $W^{m,p}(\Omega)$ que possuem suporte compacto.

Proposição 2.4. *Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e possui suporte compacto, então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Demonstração: De fato, seja $r = \operatorname{dist}\big(\operatorname{supp} u, \complement\,\Omega\big) > 0$ e ρ uma função teste em Ω tal que $\rho = 1$ numa vizinhança U do $\operatorname{supp} u$, $U \subset \Omega$. Para toda φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tem-se $\rho\varphi|_\Omega$ é uma função teste em Ω, logo se $|\alpha| \leq m$ resulta:

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha \tilde{u}, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u(x) D^\alpha(\rho\varphi)(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\,\langle u, D^\alpha(\rho\varphi|_\Omega)\rangle = \\ &= \langle D^\alpha u, (\rho\varphi|_\Omega)\rangle = \int_U D^\alpha u(x)\rho(x)\varphi(x)\,dx = \left\langle \widetilde{D^\alpha u}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

provando que $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Note-se que na última integral usa-se a Observação 2.1.

Tem-se também $\operatorname{supp} \tilde{u} = \operatorname{supp} u$, que é um compacto do $\mathbb{R}^n$, portanto se $(\rho_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão regularizante no $\mathbb{R}^n$ segue-se que $(\rho_\mu * \tilde{u})_{\mu\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$ que converge para $\tilde{u}$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Seja u_μ a restrição de $\rho_\mu * \tilde{u}$ a Ω. Segue-se então que $(u_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para $u = \tilde{u}|_\Omega$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Para $\mu > 2/r$, tem-se:

$$\operatorname{supp}(\rho_\mu * \tilde{u}) \subset \operatorname{supp} u + \overline{B_{1/\mu}(0)} \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} u) \leq r/2\} \subset \Omega,$$

logo, $\operatorname{supp} u_\mu = \operatorname{supp}(\rho_\mu * \tilde{u}) \cap \Omega = \operatorname{supp}(\rho_\mu * \tilde{u})$ é um compacto de Ω. Este argumento significa que $(u_\mu)_{\mu>2/r}$ é uma sucessão de funções testes em Ω convergindo para u em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é, $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, o que prova a proposição. ■

Observação 2.2. Se $\operatorname{supp} u$ for compacto e $u \in W^{m,p}(\Omega) \cap W^{s,q}(\Omega)$, então existe uma sucessão (φ_μ) de funções testes em Ω convergente para u na topologia de $W^{m,p}(\Omega)$ e também na topologia de $W^{s,q}(\Omega)$. Isto pode ser deduzido a partir da demonstração da Proposição 2.4.

2.1.3 O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Suponha $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Seja $f \in W^{-m,q}(\Omega)$ e (φ_μ) uma sucessão de funções testes em Ω tal que $\varphi_\mu \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Resulta que $\varphi_\mu \to 0$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$, portanto, $\langle f, \varphi_\mu \rangle \to 0$, o que permite concluir que a restrição de f a $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição. Considere a aplicação linear

$$\sigma \colon W^{-m,q}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

tal que $\sigma(f) = f|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ para todo f em $W^{-m,q}(\Omega)$. Por ser $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $W_0^{m,p}(\Omega)$ resulta que σ é injetora. Também se (f_μ) é uma sucessão de vetores de $W^{-m,q}(\Omega)$ tal que $f_\mu \to 0$ em $W^{-m,q}(\Omega)$ então $\sigma(f_\mu) \to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é, σ é contínua. A aplicação σ permite identificar $W^{-m,q}(\Omega)$ a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e com esta identificação tem-se:

$$W^{-m,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Quando se diz que uma distribuição T pertence a $W^{-m,q}(\Omega)$, significa dizer que T, definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$. Esta extensão contínua é ainda representada por T. O resultado que segue caracteriza as distribuições de $W^{-m,q}(\Omega)$.

Lema 2.1. *Seja k um inteiro positivo e $E = (L^p(\Omega))^k$ normado por:*

$$\|\omega\|_E = \left(\sum_{\mu=1}^{k} \|\omega_\mu\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

para todo $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \in E$. Um funcional linear f definido em E é contínuo se e somente se existem $f_1, f_2, \ldots, f_k \in L^q(\Omega)$, dual de $L^p(\Omega)$, tal que

$$\langle f, \omega \rangle = \sum_{\mu=1}^{k} \int_\Omega f_\mu(x) \omega_\mu(x)\, dx$$

para todo $\omega \in E$.

A demonstração fica como exercício para o leitor.

Teorema 2.2. *Seja T uma distribuição sobre Ω. Então $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se e somente se existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tais que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha .$$

Demonstração: Suponha T definida pelo somatório acima. Então, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se:

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_{m,p} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|g_\alpha\|^q_{L^q(\Omega)} \right)^{1/q}, \quad 1 < p < \infty.$$

Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $W_0^{m,q}(\Omega)$, a última desigualdade diz ser possível estender T, por continuidade, ao espaço $W_0^{m,q}(\Omega)$ e portanto, $T \in W^{-m,q}(\Omega)$. O caso $p = 1$ se procede de forma análoga.

Seja $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ e k o número de multi-índices α tais que $|\alpha| \leq m$. Os elementos u de $E = (L^p(\Omega))^k$ podem ser escritos como $(u_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$, $u_\alpha \in L^p(\Omega)$. Como a aplicação

$$\sigma\colon W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow E \quad u \mapsto \sigma(u) = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m},$$

é uma isometria linear, tem-se que $E_0 = \left\{(D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m}\,;\, u \in W_0^{m,p}(\Omega)\right\}$ é um subespaço fechado de E. Seja f_0 o funcional linear definido em E_0 por

$$\left\langle f_0, (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m} \right\rangle = \langle T, u\rangle, \qquad u \in W_0^{m,p}(\Omega),$$

isto é, $f_0 = T\sigma^{-1}$, é um funcional linear contínuo. Pelo teorema de Hahn-Banach, f_0 possui uma extensão ao espaço E, que representa-se por f. Pelo Lema 2.1 existe um vetor $({g'}_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$, $g'_\alpha \in L^q(\Omega)$, dual de $L^p(\Omega)$, tal que:

$$\left\langle f, (\omega_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \right\rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega g'_\alpha(x) \omega_\alpha(x)\, dx$$

para todo $(\omega_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ em E.

Para todo φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi\rangle &= \left\langle f_0, (D^\alpha \varphi)_{|\alpha| \leq m} \right\rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega g'_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = \\ &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha g'_\alpha, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Tomando $g_\alpha = (-1)^{|\alpha|}\, g'_\alpha$, a última igualdade diz que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha\, g_\alpha$$

o que demonstra o teorema. ■

Observação 2.3. O mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 2.2 mostra que se $T \in (W^{m,p}(\Omega))'$, isto é, T pertence ao dual de $W^{m,p}(\Omega)$, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, dual de $L^p(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tais que

$$\langle T, u \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega g_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx$$

para todo u em $W^{m,p}(\Omega)$. Tem-se $T|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$, mas a aplicação

$$\sigma \colon (W^{m,p}(\Omega))' \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

definida por $\sigma(T) = T|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ não é injetora se $W_0^{m,p}(\Omega)$ está contido estritamente em $W^{m,p}(\Omega)$.

De fato, seja $u_0 \in W^{m,p}(\Omega)$ tal que $u_0 \notin W_0^{m,p}(\Omega)$ e T o funcional identicamente nulo em $W^{m,p}(\Omega)$. Considere, pelo Teorema de Hahn-Banach, $S \in (W^{m,p}(\Omega))'$ tal que $Su = 0$ para $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ e $\langle S, u_0 \rangle \neq 0$. Tem-se $T|_{\mathcal{D}(\Omega)} = S|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ mas $T \neq S$ pois $\langle T, u_0 \rangle = 0$ e $\langle S, u_0 \rangle \neq 0$. Assim σ não é injetora. Em razão disto, diz-se que se $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$, o espaço $(W^{m,p}(\Omega))'$ não define um espaço de distribuições sobre Ω.

2.1.4 Reflexividade dos Espaços de Sobolev

Para provar que os espaços $W^{m,p}(\Omega),\ 1 < p < \infty$, são reflexivos, dois resultados são recordados: o primeiro é que os $L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty$, são reflexivos e o segundo é o Teorema de Alaoglu-Bourbaki; este teorema afirma que um espaço de Banach E é reflexivo se e somente se toda sucessão limitada de vetores de E possui uma subsucessão fracamente convergente.

Teorema 2.3. *Se $1 < p < +\infty$ então $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.*

Demonstração: Seja (u_μ) uma sucessão limitada de vetores de $W^{m,p}(\Omega)$. Então, para todo $|\alpha| \leq m$, $(D^\alpha u_\mu)$ é limitada em $L^p(\Omega)$. Resulta a existência de uma subsucessão $\left(u'_\mu\right)$ de (u_μ) que converge fracamente. Do fato que $\left(D_1 u'_\mu\right)$ é limitada em $L^p(\Omega)$, vem que existe uma subsucessão $\left(u''_\mu\right)$ de $\left(u'_\mu\right)$ tal que $\left(D_1 u''_\mu\right)$ é fracamente convergente. Por sucessivas aplicações deste argumento encontra-se uma subsucessão (v_μ) de (u_μ) e uma função $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \leq m$ a sucessão $(D^\alpha v_\mu)$ é fracamente convergente em $L^p(\Omega)$ para um vetor v_α. Isto significa que para cada $|\alpha| \leq m$ e $\bar{\omega} \in L^q(\Omega)$, tem-se:

$$\int_\Omega D^\alpha\, v_\mu(x)\omega(x)\, dx \to \int_\Omega v_\alpha(x)\omega(x)\, dx$$

sendo $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Considerando-se $v = v_{(0,0,\ldots,0)}$, da convergência acima, obtém-se que $v_\mu \to v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $D^\alpha v_\mu \to v_\alpha$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, $0 < |\alpha| \leq m$. Também $D^\alpha v_\mu \to D^\alpha v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$. Da unicidade dos limites em $\mathcal{D}'(\Omega)$ segue-se então que $D^\alpha v = v_\alpha$, $|\alpha| \leq m$. Assim $v \in W^{m,p}(\Omega)$.

Resta somente provar que (v_μ) converge para v fracamente em $W^{m,p}(\Omega)$. De fato, seja T uma forma linear contínua definida em $W^{m,p}(\Omega)$. Da Observação 2.3, tem-se a existência de funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que

$$\langle T, u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega g_\alpha(x) D^\alpha u(x)\,dx$$

para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Segue-se que:

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to\infty} \langle T, v_\mu\rangle &= \lim_{\mu\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega g_\alpha(x) D^\alpha v_\mu(x)\,dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega g_\alpha(x) D^\alpha v(x)\,dx = \langle T, v\rangle\end{aligned}$$

o que demonstra o teorema. ■

Enuncia-se a seguinte desigualdade:

Teorema 2.4. *(Desigualdade de Poincaré-Wirtinger). Seja Ω um aberto limitado e conexo de R^n, Ω de classe C^1, e $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||u - \bar{u}||_{L^p(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$$

onde

$$\bar{u} = \frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega u(x)\,dx.$$

Dessa desigualdade vem que

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \quad \forall\, u \in S^{1,p}(\Omega),\ \bar{u} = 0.$$

A definição de Ω de classe C^1 é dada na Seção 4.2 deste capítulo.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em S. Kesavan [11], pag. 88.

2.1.5 Os Espaços $H^m(\Omega)$ e $H^{-m}(\Omega)$

Se L for o operador diferencial $\sum\limits_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\, D^{2\alpha}$, resulta que para $u \in H^m(\Omega)$, Lu é uma distribuição não necessariamente definida por uma função localmente integrável. Além disto, se $u \in H^m(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$, tem-se $g_\alpha = D^\alpha u$ pertence a $L^2(\Omega)$ e pelo Teorema 2.2, $Lu = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha g_\alpha$ pertence a $H^{-m}(\Omega)$. Portanto, podemos considerar a realização de L como um operador linear de $H^m(\Omega)$ em $H^{-m}(\Omega)$. A seguir caracteriza-se a imagem de $H_0^m(\Omega)$ por L.

Proposição 2.5. *O complemento ortogonal de $H_0^m(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é o núcleo do operador diferencial linear L.*

Demonstração: Para todo u em $H^m(\Omega)$ e φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ tem-se:

$$\langle Lu, \varphi\rangle = (u, \bar{\varphi})_m \ .$$

Se u pertence ao ortogonal de $H_0^m(\Omega)$ então $(u, v)_m = 0$ para todo $v \in H_0^m(\Omega)$, em particular, $(u, \bar{\varphi})_m = 0$ para toda função teste φ em Ω, portanto, $\langle Lu, \varphi\rangle = 0$ para toda função teste, isto é, $Lu = 0$.

Suponha agora $u \in H^m(\Omega)$ e $Lu = 0$. Então $(u, \varphi)_m = \langle Lu, \bar{\varphi}\rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $H_0^m(\Omega)$, tem-se $(u, v)_m = 0$ para todo v em $H_0^m(\Omega)$, isto é, u é ortogonal a $H_0^m(\Omega)$. ■

Proposição 2.6. *O operador L transforma $H_0^m(\Omega)$ sobre $H^{-m}(\Omega)$, de maneira isométrica.*

Demonstração: Seja $f \in H^{-m}(\Omega)$, então pelo Teorema da Representação de Riesz vem que existe $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que

$$\langle f, v\rangle = (v, u)_m \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^m(\Omega),$$

e $\|f\|_{-m} = \|u\|_m$. Segue-se que

$$\langle f, \varphi\rangle = (\varphi, u)_m = \langle L\bar{u}, \varphi\rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

portanto, tem-se $f = L\bar{u}$ com $u \in H_0^m(\Omega)$ e $\|L\bar{u}\|_{-m} = \|f\|_{-m} = \|u\|_m = \|\bar{u}\|_m$.

Proposição 2.7. *$\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^{-m}(\Omega)$.*

Demonstração: Dado $f \in H^{-m}(\Omega)$, seja $u \in H_0^m(\Omega)$ tal que $Lu = f$. Se (φ_μ) é uma sucessão de $\mathcal{D}(\Omega)$, convergente para u em $H_0^m(\Omega)$, a sucessão $(L\varphi_\mu)$ converge para $Lu = f$ em $H^{-m}(\Omega)$, porque L é uma isometria. Isto prova a proposição, desde que $L\varphi_\mu$ é uma função teste. ■

Proposição 2.8. *$\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Tem-se $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega)$ com $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $H_0^m(\Omega)$. Então por dualidade resulta $H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ com $H^{-m}(\Omega)$ denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Desta densidade e da densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^{-m}(\Omega)$ dada pela Proposição 2.7, segue a proposição. ■

Para concluir esta seção mostra-se a Desigualdade de Poincaré da qual obtém-se significantes propriedades para os espaços $H_0^m(\Omega)$. Inicia-se introduzindo a seguinte definição. Diz-se que o aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é *limitado na direção x_i* se existe um intervalo aberto finito $]a,b[$ da reta tal que

$$pr_i\,\Omega \subset \,]a,b[$$

onde pr_i é a projeção de $\mathbb{R}^n$ sobre o eixo x_i.

Teorema 2.5. *(Desigualdade de Poincaré) Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ limitado em alguma direção x_i. Então*

$$\int_\Omega |u\,(x)|^2\,dx \le (b-a)^2 \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx \quad \textit{para todo} \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

onde $pr_i\,\Omega \subset \,]a,b[$.

Demonstração: Primeiro mostra-se a desigualdade (2.6) para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O resultado geral seguirá então por densidade. Inicialmente considera-se $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$. Tem-se:

$$\varphi(t) = \int_a^t \varphi'(s)\,ds, \qquad a \le t \le b,$$

que acarreta, pela desigualdade de Schwarz, $|\varphi(t)|^2 \le (b-a)\displaystyle\int_a^b |\varphi'\,(s)|^2\,ds$, a qual implica

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt \le (b-a)^2 \int_a^b |\varphi'(t)|^2\,dt. \tag{2.7}$$

Sem perda de generalidade supõe-se que Ω é limitado na direção x_1. Considera-se a notação $x = (t, x')$ onde $x' = (x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_a^b |\varphi(t, x')|^2 \, dt \right) dx'. \tag{2.8}$$

Observa-se que $\psi_{x'}(t) = \varphi(t, x')$ pertence a $\mathcal{D}(]a, b[)$ para cada $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Logo a desigualdade (2.7) com $\psi_{x'}$ implica

$$\int_a^b |\varphi(t, x')|^2 \, dt \leq (b-a)^2 \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x') \right|^2 dt.$$

Considerando esta desigualdade em (2.8) resulta:

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2 \, dx \leq (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x') \right|^2 dt \right) dx' = (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx,$$

que é precisamente a desigualdade (2.6). Assim o teorema está provado. ■

Observação 2.4. Considere-se u em $H_0^1(\Omega)$, Ω limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$, e a expressão

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Então a desigualdade de Poincaré diz que $\|u\|$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ e que em $H_0^1(\Omega)$ as normas $\|u\|$ e $\|u\|_1 = \|u\|_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes. Com base neste resultado, em $H_0^1(\Omega)$, Ω limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$, considera-se o produto escalar

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}} \, dx.$$

Corolário 2.1. *Em $H_0^m(\Omega)$, Ω aberto limitado em alguma direção x_i de R^n, as normas*

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

e $\|u\|_m = \|u\|_{H^m(\Omega)}$ são equivalentes.

Demonstração: Mostra-se que

$$\|u\|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \leq C \|u\|^2 \tag{2.9}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de $u \in H_0^m(\Omega)$. A outra desigualdade é imediata. Seja $u \in H_0^m(\Omega)$ então $D^\alpha u \in H_0^1(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq m-1$. Da Observação 2.4 resulta então

$$\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \leq C \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u(x) \right|^2 dx.$$

Isto acarreta,

$$\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \leq C \sum_{|\beta|=m} \int_\Omega \left| D^\beta u(x) \right|^2 dx \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq m-1.$$

Esta desigualdade implica (2.9) e a demonstração está concluída. ■

Corolário 2.2. *Em $W_0^{m,p}(\Omega)$, Ω aberto limitado em alguma direção x_i de R^n e $1 \leq p < \infty$, as normas*

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

e $\|u\|_{m,p} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ são equivalentes.

Demonstração: Aplicando raciocínio análogo ao usado para obter (2.7), resulta

$$\int_a^b |\varphi(t)|^p \, dt \leq (b-a)^{\frac{p+q}{q}} \int_a^b |\varphi'(t)|^p \, dt, \qquad \left(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

e

$$\int_a^b |\varphi(t)| \, dt \leq (b-a) \int_a^b |\varphi'(t)| \, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[).$$

Com estas desigualdades e com argumentos semelhantes aos usados na demonstração do Corolário 2.1, segue o corolário. ■

Observe que o Corolário 2.2 com Ω limitado do $\mathbb{R}^n$ também pode ser obtido usando as desigualdades de Sobolev e as propriedades do operador de prolongamento a serem estudadas nos parágrafos 2.3 e 2.4, respectivamente, deste capítulo.

Observação 2.5. Considere-se em $H_0^m(\Omega)$, Ω aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$, a norma introduzida no Corolário 2.1. Então pelos argumentos usados na demonstração da Proposição 2.6, obtém-se que

$$L\colon H_0^m(\Omega) \to H^{-m}(\Omega), \qquad L = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$$

é uma isometria linear. Em particular

$$-\Delta\colon H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \qquad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

é uma isometria linear.

2.2 Imersões de Espaços de Sobolev

Neste parágrafo estuda-se a relação entre os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e certos espaços clássicos de funções em $\mathbb{R}^n$. Mostra-se certa regularidade dos objetos de um certo espaço de Sobolev, isto é, mostra-se que quando a ordem m de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é grande eles possuem derivadas genuinas em $\mathbb{R}^n$.

O estudo é dividido em três partes:

I) $n \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$,

II) $n = 1$ e $1 \leq p < \infty$,

III) $n \geq 1$ e $p = \infty$.

Na parte I) analisa-se os três casos possíveis: $mp < n$, $mp = n$ e $mp > n$. As partes II) e III) são estudadas nas Seções 2.2.4 e 2.2.5, respectivamente. Assim todos os casos possíveis são analisados.

No que se segue, nas três primeiras seções, estuda-se a parte I), isto é, quando $n \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$.

2.2.1 Caso $mp < n$

Nesta seção mostra-se a imersão contínua de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$, q especial.

Inicia-se o estudo com a obtenção de alguns resultados preliminares. Representa-se por p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a projeção de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n-1}$ dada por

$$p_i x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Os pontos do $\mathbb{R}^{n+1}$ são também escritos sob a forma (x, t) sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$; as projeções de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$\sigma_i(x, t) = (p_i x, t), \;\; i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{e} \quad \sigma_{n+1}(x, t) = x.$$

Proposição 2.9. *(Sobolev-Gagliardo) Se $u_1, u_2, \ldots, u_n \in L^{n-1}(R^{n-1})$ então*

a) $u = (u_1 p_1) \cdot (u_2 p_2) \ldots (u_n p_n) \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

b) $\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$

Demonstração: Inicialmente, observe que se $x \in \mathbb{R}^n$, $(u_i p_i)(x) = u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. No caso $n = 2$ vem $u(x_1, x_2) = u_1(x_2) u_2(x_1)$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, portanto

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|u_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|u_2\|_{L^1(\mathbb{R})} \ .$$

Suponha a proposição verdadeira para $n \geq 2$. Dados $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$, seja $\omega = \prod_{i=1}^{n+1} \omega_i \sigma_i$, isto é,

$$\omega(x,t) = \prod_{i=1}^{n} \omega_i(p_i x, t) \cdot \omega_{n+1}(x) \quad \text{para todo} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$, considere:

$$\begin{aligned} u_{i,t}(y) &= |\omega_i(y,t)|^{n/n-1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n \\ u_t(x) &= \prod_{i=1}^{n} u_{i,t}\, p_i(x) = \prod_{i=1}^{n} |\omega_i(p_i x, t)|^{n/n-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Do teorema de Fubini obtém-se $u_{i,t} \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ e da hipótese indutiva resulta $u_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e também

$$||u_t||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} ||u_{i,t}||_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \ . \tag{2.10}$$

Observando que $|\omega(x,t)| = u_t(x)^{(n-1)/n}\ |\omega_{n+1}(x)|$ e que $\dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n} = 1$, de (2.10) e da desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\omega\,(x,t)|\, dx \ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t(x))^{(n-1)/n}\ |\omega_{n+1}(x)|\ dx \ \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x) dx \right)^{(n-1)/n} \ \|\omega_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \ \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} \|u_{i,t}\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{(n-1)/n} \cdot \|\omega_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Obtém-se também,

$$\|u_{i,t}\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\omega_i(y,t)|^n\, dy.$$

Se $\theta_i(t) = ||u_{i,t}||_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{(n-1)/n}$ segue-se do teorema de Fubini que $\theta_i \in L^n(\mathbb{R})$ e que:

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_i^n\,(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega_i\,(y,t)|^n\, dydt,$$

isto é,

$$\|\theta_i\|_{L^n(\mathbb{R})} = \|\omega_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.12}$$

De (2.11), (2.12) e pela desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\omega(x,t)|\, dxdt \ &\leq \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} \theta_i(t)\, dt \cdot \|\omega_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} \left[\int_{\mathbb{R}} \theta_i^n(t)\, dt\right]^{1/n} \|\omega_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} = \\
&= \prod_{i=1}^{n} \|\theta_i\|_{L^n(\mathbb{R})} \cdot \|\omega_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} = \\
&= \prod_{i=1}^{n+1} \|\omega_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

o que prova a proposição.

Proposição 2.10. *Dado* $1 \leq p < n$*, considere* $C_0 = \dfrac{(n-1)\,p}{n-p}$ *e* $s = \dfrac{n\,(p-1)}{n-p}$. *Então, para toda função teste* φ *no* R^n*, existem* $u_1, u_2, \ldots, u_n \in L^{n-1}(R^{n-1})$*, verificando:*

a) $\|u_i\|^{n-1}_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_0 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^s\ |D_i\varphi(x)|\ dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$

b) $|\varphi(x)|^{p/(n-p)} \leq |u_i(p_i x)|\,, \quad \text{para} \quad x \in R^n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Demonstração: Não há perda de generalidade admitir-se $i = 1$. Se $u_1(y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t,y)|^{p/(n-p)}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, é simples concluir, notando que o suporte de u_1 é um compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$, que $u_1 \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ e que u_1 satisfaz a condição **b)**.

A seguir mostra-se que u_1 também satisfaz a condição **a)**. Para isto, considera-se dois casos. Primeiro quando $p = 1$ e depois quando $1 < p < n$.

Para o primeiro caso, observe que $C_0 = 1$ e $s = 0$. Também

$$\varphi(t,y) = \int_{-\infty}^{t} D_1\varphi(\xi,y)\, d\xi$$

que acarreta

$$|\varphi(t,y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_1\varphi(\xi,y)|\, d\xi.$$

Esta desigualdade implica **a)**.

Analiza-se o segundo caso. Aqui $C_0 > 1$. Como $C_0 = s+1$, vem que $s > 0$. Considere os conjuntos

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \varphi(x) \neq 0\} \quad \text{e} \quad K = \operatorname{supp}\varphi.$$

Denote por Γ a fronteira de $\mathcal{O}$ e por $f(x)$ a função $|\varphi(x)|^{C_0}$. Para mostrar **a)** primeiro prova-se $D_1 f(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$, depois que $D_1 f$ é contínua em $\mathbb{R}^n$ e finalmente mostra-se **a)**. Com efeito, se $x \in \complement K$ então $D_1 f(x) = 0$ e $D_1 f$ é contínua em $\complement K$. Seja $x \in \mathcal{O}$ Então

$$\begin{aligned} D_1 f(x) &= D_1 (\varphi(x)\bar{\varphi}(x))^{C_0/2} = \frac{C_0}{2} |\varphi(x)|^{C_0-2} (\varphi(x) D_1\bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(x) D_1\varphi(x)) = \\ &= C_0 |\varphi(x)|^{C_0-2} \operatorname{Re}(\varphi(x) D_1\bar{\varphi}(x)). \end{aligned}$$

Esta igualdade implica que $D_1 f$ existe em $\mathcal{O}$ e que $D_1 f$ é contínua em $\mathcal{O}$.

Sejam $x \in \Gamma$, h um número real com $|h| \le 1$ e e_1 o vetor $(1, 0, \ldots, 0)$ do $\mathbb{R}^n$. Note que $\varphi(x) = 0$. Pelo Teorema do Valor Médio resulta então

$$|\varphi(x + he_1)| \le \sup_{|\tau| \le 1} |D_1\varphi(x + \tau e_1)|\ |h| \le k_1 |h|$$

portanto

$$\frac{f(x + he_1)}{|h|} \le k_2 |h|^s, \quad h \neq 0,$$

onde k_1 e k_2 são constantes positivas independentes de h. A última desigualdade implica que $D_1 f(x)$ existe e que $D_1 f(x) = 0$ para todo $x \in \Gamma$, pois $s > 0$. Logo $D_1 f(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$ pois $\mathbb{R}^n = \complement K \cup \Gamma \cup \mathcal{O}$.

A seguir mostra-se que $D_1 f$ é contínua em Γ que implicará a continuidade de $D_1 f$ em $\mathbb{R}^n$. Seja então $x \in \Gamma$ e (x_μ) uma sucessão de pontos do $\mathbb{R}^n$ tal que $x_\mu \to x$ quando $\mu \to \infty$. Se $x_\mu \in \complement\mathcal{O}$ então $D_1 f(x_\mu) = 0$. Suponha que $x_\mu \in \mathcal{O}$ então da igualdade obtida acima para calcular $D_1 f(x)$, obtém-se

$$|D_1 f(x_\mu)| \le C_0 |\varphi(x_\mu)|^s |D_1\varphi(x_\mu)| \le k_3 |\varphi(x_\mu)|^s$$

onde k_3 é uma constante independente de μ. Esta última desigualdade acarreta que $|D_1 f(x_\mu)| \to 0$ quando $\mu \to \infty$ pois $s > 0$ e $\varphi(x_\mu) \to \varphi(x)$ quando $\mu \to \infty$. Assim $D_1 f$ é contínua em Γ.

Finalmente mostra-se a parte **a)**. Da igualdade obtida para calcular $D_1 f(x)$ com $x \in \mathcal{O}$ resulta

$$\left| D_1 |\varphi(x)|^{C_0} \right| \le C_0 |\varphi(x)|^s |D_1\varphi(x)|.$$

Isto acarreta

$$|\varphi(t,y)|^{C_0} = \int_{-\infty}^{t} D_1 |\varphi(\xi,y)|^{C_0} d\xi \leq C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi,y)|^s |D_1\varphi(\xi,y)| d\xi$$

que implica

$$|u_1(y)|^{n-1} \leq C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi,y)|^s |D_1\varphi(\xi,y)| d\xi$$

que permite obter a parte **a)**. ■

Proposição 2.11. *(Desigualdade de Sobolev) Suponha* $1 \leq p < n$ *e considere*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \qquad e \qquad C_0 = \frac{(n-1)p}{(n-p)} \cdot$$

Então para cada $\varphi \in D(R^n)$ *tem-se:*

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_0}{n} \sum_{i=1}^{n} \|D_i\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Demonstração: Quando $p = 1$, tem-se $s = 0$, $C_0 = 1$ e $(n-1)q = n$ (s e C_0 definidos no enunciado da Proposição 2.10). Portanto,

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(n-1)q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{n/(n-1)} \, dx\right)^{n-1} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |u_i(p_i(x))| \, dx\right)^{n-1} .$$

Disto e das Proposições 2.9 e 2.10 decorre

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(n-1)q} \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \|D_i\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{2.13}$$

que implica a desigualdade de Sobolev, pois para números reais não negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tem-se $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$. No caso $p > 1$, considere $p' = p/(p-1)$. Desde que $p's = np/(n-p) = q$, tem-se:

$$\| \, |\varphi|^s \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}^{p'} = \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{q} .$$

Considere $u_1, u_2, \ldots, u_n$ em $L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ como na Proposição 2.10. Pela parte **a)** desta proposição e pela desigualdade de Hölder, obtém-se:

$$\|u_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{n-1} \leq C_0 \|D_i\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{q/p'} .$$

Da parte **b)** da Proposição 2.10, resulta:

$$|\varphi(x)|^q = \left(|\varphi(x)|^{p/(n-p)}\right)^n \leq \prod_{i=1}^n |u_i(p_i(x))|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pela Proposição 2.9 e pelas duas últimas desigualdades, obtém-se

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(n-1)q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q \, dx\right)^{n-1} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n |u_i(p_i(x))| \, dx\right)^{n-1} \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^{n-1} \leq C_0^n \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{nq/p'} \prod_{i=1}^n \|D_i\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Note que sendo $(n-1)q - \dfrac{nq}{p'} = n$, a desigualdade anterior implica a de Sobolev quando $\varphi \neq 0$. Quando $\varphi = 0$ a desigualdade segue diretamente. Assim a demonstração está concluída. ■

Observação 2.6. Note-se que a desigualdade de Sobolev dada na Proposição 2.11 é válida para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, isto é, para $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e φ com suporte compacto. Em particular de (2.13) resulta com $q = n/(n-1)$:

$$\|\varphi\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^n \leq \prod_{i=1}^n \|D_i\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Observação 2.7. Note-se que se $1 \leq p < \infty$ e m, n são números inteiros não negativos então

a) $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ se, e somente se, $mp < n$;

b) $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ implica $p < q$.

A seguir mostra-se a imersão de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.6. *(Sobolev). Sejam $1 \leq p < \infty, mp < n$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}\cdot$ Então $W^{m,p}(R^n)$ está contido em $L^q(R^n)$ e se verifica*

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.14}$$

para todo $u \in W^{m,p}(R^n)$, onde $C_0 = (n-1)p/(n-p)$.

Demonstração: Prova-se primeiro a desigualdade para as funções φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Na prova aplica-se o método de indução com relação a m. Com efeito, para $m = 1$ a desigualdade (2.14) é a desigualdade obtida na Proposição 2.11. Suponha então que (2.14) é válida para $m \geq 1$, isto é,

$$||\varphi||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

com $mp_1 < n$ e $\dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{m}{n}\cdot$ Deseja-se obter a desigualdade (2.14) para $m+1$. Tem-se então $(m+1)p < n$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m+1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} - \frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{n}\cdot$$

Da hipótese de indução e da Proposição 2.11 resulta então para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\varphi\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ , \tag{2.15}$$

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_0}{n} \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \ . \tag{2.16}$$

De (2.15) obtém-se:

$$\|D_i \varphi\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha D_i \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{n} \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^{m+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha D_i \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \\ &= \left(\frac{C_0}{n}\right)^{m+1} \sum_{|\alpha|=m+1} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, . \end{aligned} \tag{2.17}$$

De (2.16) e (2.17) segue a desigualdade (2.14) para $m+1$. Assim o teorema está mostrado para φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma sucessão (φ_μ) de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_\mu \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Logo

$$D^\alpha \varphi_\mu \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n), \quad \text{para todo } |\alpha| \leq m. \tag{2.18}$$

Tem-se:

$$\|\varphi_\mu - \varphi_\sigma\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha\varphi_\mu - D^\alpha\varphi_\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Logo, pelas convergências (2.18), segue-se que (φ_μ) é uma sucessão de Cauchy em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Resulta disto e de (2.18) que

$$\varphi_\mu \to v \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \varphi_\mu \to u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.19}$$

Passando ambas as convergências ao espaço $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ resulta $u = v$, portanto $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Assim $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Tomando o limite em ambos os lados da desigualdade

$$\|\varphi_\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha\varphi_\mu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

segue das convergências (2.18) e (2.19), a desigualdade (2.14) para $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Isto prova o teorema. ■

Como uma conseqüência direta do Teorema 2.6, seguem os resultados:

Corolário 2.3. *Seja* $1 \leq p < \infty,\ mp < n$ *e* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}\cdot$ *Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Corolário 2.4. *Se* $1 \leq p < \infty,\ mp < n$ *e* $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$ *então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: De fato, ponha $q_0 = \dfrac{np}{n-mp}$ e considere o espaço de Banach $E = L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ com a norma

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n)} .$$

Sendo $p \leq q \leq q_0$, tem-se pela Proposição 1.1 do Capítulo 1, que $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$. Pelo Corolário 2.3 resulta $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow E$. Destas duas imersões contínuas segue o corolário. ■

Corolário 2.5. *Se* $1 \leq p < \infty,\ mp < n$ *e* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$ *então* $W^{m+k,p}(R^n) \hookrightarrow W^{k,q}(R^n)$ *para todo* k *inteiro não negativo.*

Demonstração: Seja $|\alpha| \leq k$ então pelo Teorema 2.6 resulta para φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|D^\alpha \varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{C_0}{n}\right)^m \sum_{|\beta|=m} \left\|D^\beta D^\alpha \varphi\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

de onde

$$\|D^\alpha \varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\sum_{|\gamma| \leq m+k} \|D^\gamma \varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p}$$

que implica

$$\|\varphi\|_{W^{k,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|\varphi\|_{W^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de φ. Desta desigualdade e da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $W^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)$ segue o corolário. ■

Observação 2.8. Seja $1 \leq p < n$. Note-se que se existem constantes $C > 0$ e $1 \leq r < \infty$ verificando a desigualdade

$$\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Então $r = q$ onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.

Com efeito, da desigualdade com $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$, $\lambda > 0$, resulta

$$\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \lambda^{\left(1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{p}\right)} \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ para todo } \lambda > 0$$

que implica $1 + \dfrac{n}{r} - \dfrac{n}{p} = 0$. ■

A última observação indica que a Desigualdade de Sobolev (Proposição 2.11) é ótima no sentido que não se pode encontrar $r > q$ que verifique dita desigualdade.

2.2.2 Caso $mp = n$

Nesta seção mostra-se que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, \infty[$. Para isto prova-se inicialmente o seguinte resultado:

Lema 2.2. *Seja $q \in [n, \infty[$. Então existe uma constante $C(n, q) > 0$ tal que*

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, q) \, \|\varphi\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: De fato, da Observação 2.6 resulta

$$\|\varphi\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|D_i\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Seja $\rho > 1$ e $\psi = |\varphi|^{\rho-1}\,\varphi$ com $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Então desta desigualdade com ψ resulta

$$\|\varphi\|_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\rho} \leq \rho \prod_{i=1}^{n} \left\| \, |\varphi|^{\rho-1}\, D_i\varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n} .$$

Tem-se, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi\,(x)|^{\rho-1}\, |D_i\varphi\,(x)|\; dx \leq \|\varphi\|_{L^{(\rho-1)p'}(\mathbb{R}^n)}^{\rho-1}\, \|D_i\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Combinando as duas últimas desigualdades resulta

$$\|\varphi\|_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\rho} \leq \rho\, \|\varphi\|_{L^{(\rho-1)p'}(\mathbb{R}^n)}^{\rho-1} \prod_{i=1}^{n} \|D_i\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/n} .$$

Fazendo $p = n$, portanto $p' = n/\,(n-1)$, nesta última desigualdade e notando que a média geométrica é menor ou igual que a média aritmética, obtém-se:

$$\|\varphi\|_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\rho} \leq \frac{\rho}{n}\; \|\varphi\|_{L^{(\rho-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{\rho-1} \sum_{i=1}^{n} \|D_i\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} .$$

Desta expressão e aplicando a desigualdade de Young para números reais não negativos $ab \leq \dfrac{a^\rho}{\rho} + \dfrac{b^{\rho/(\rho-1)}}{\rho\,/(\rho-1)}$ resulta

$$\|\varphi\|_{L^{\rho n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{(\rho-1)}{\rho}\; \|\varphi\|_{L^{(\rho-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|D_i\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} . \tag{2.20}$$

A expressão (2.20) implicará a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^{(n+k)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{(n-1)}{n+k}\; \|\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \\ &+ \frac{(k+1)(2n+k)}{2n(n+k)} \sum_{i=1}^{n} \|D_i\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \,, \;\; \forall\, k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.21}$$

Mostra-se esta desigualdade por indução com relação a k. Com efeito, fazendo $\rho = n$ em (2.20) resulta (2.21) com $k = 0$. Suponha (2.21) verdadeiro para $k \geq 0$ e considere $k+1$. Fazendo $\rho = n+k+1$ em (2.20) e usando a hipótese de indução, obtém-se:

$$\|\varphi\|_{L^{(n+k+1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq \frac{n+k}{n+k+1}\left[\frac{n-1}{n+k}\|\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \frac{(k+1)(2n+k)}{2n(n+k)}\sum_{i=1}^{n}\|D_i\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right] +$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|D_i\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} =$$
$$= \frac{n-1}{n+k+1}\|\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \frac{(k+2)(2n+k+1)}{2n(n+k+1)}\sum_{i=1}^{n}\|D_i\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

que dá a desigualdade (2.21) com $k+1$.

Seja $q \in [n, \infty[$. Então existe $k = 0, 1, \ldots$ tal que $n \leq q \leq \dfrac{(n+k)n}{n-1}\cdot$ Pela desigualdade de interpolação, Proposição 1.1 do Capítulo 1, resulta:

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{\theta}\|\varphi\|_{L^{(n+k)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{1-\theta}{(n+k)n/(n-1)}$. Como $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^{p/(p-1)}}{p/\,(p-1)}$, então para $p = \dfrac{1}{\theta}$ obtém-se:

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \theta\|\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + (1-\theta)\|\varphi\|_{L^{(n+k)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.22}$$

Combinando (2.21) e (2.22), resulta:

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\,(n,q)\left(\|\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n}\|D_i\varphi\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Da última expressão e do fato que no espaço $E = L^n(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^n(\mathbb{R}^n)$ ($(n+1)$ vezes $L^n(\mathbb{R}^n)$) todas as normas são equivalentes, seguirá o lema. ■

Teorema 2.7. *Seja* $1 \leq p < \infty$, $mp = n$ *e* $q \in [p, \infty[$. *Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Mostra-se o teorema por indução com relação a m. Com efeito, se $m = 1$ então $p = n$ e o Lema 2.2 diz

$$\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,q)\,\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

O teorema segue então pela densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Suponha que o teorema é válido para $m \geq 1$ e considere $m+1$ com $(m+1)p = n$. Tem-se então $\dfrac{1}{n/m} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n} > 0$ que implica, pelo Corolário 2.3, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{n/m}(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, o Corolário 2.5 acarreta $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m,n/m}(\mathbb{R}^n)$. Pela hipótese de indução resulta $W^{m,n/m}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [n/m, \infty[$. Das duas últimas inclusões contínuas segue

$$W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{para todo} \quad q \in [n/m, \infty[\,. \tag{2.23}$$

De (2.23) resulta $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{n/m}(\mathbb{R}^n)$ e como $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, $p = \dfrac{n}{m+1}$, segue-se por interpolação de espaços que

$$W^{m+1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{para todo} \quad q \in [p, n/m]\,. \tag{2.24}$$

De (2.23) e (2.24) segue o teorema. ■

No caso $p = 1$ tem-se o resultado suplementar $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$. $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{K}$, equipado com a norma do supremo em $\mathbb{R}^n$ (ver a seção a seguir).

2.2.3 Caso $mp > n$

Nesta seção mostra-se que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente num espaço de funções regulares em $\mathbb{R}^n$.

Inicialmente introduz-se alguns espaços que serão utilizados na formulação dos resultados. Com efeito, denota-se por $C_b^k(\mathbb{R}^n)$, k inteiro não negativo, o espaço de Banach das funções $u\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^k, limitadas assim como todas suas derivadas até a ordem k, equipado com a norma

$$\|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u\,(x)|\,,$$

e denota-se por $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$, o espaço de Banach das funções $u \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ tais que u e todas suas derivadas até a ordem k são Hölderianas com expoente λ em $\mathbb{R}^n$, mais precisamente,

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\lambda} < \infty,$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\lambda}\,.$$

Observação 2.9. Claramente $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$. Tem-se também que

$$C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{se} \qquad 0 < \sigma < \lambda.$$

Com efeito, se $x \neq y$ e $\|x-y\| \leq 1$ então

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\sigma} \leq \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\lambda}$$

e se $\|x-y\| > 1$ então

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\sigma} \leq |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq 2 \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(z)|$$

de onde segue a afirmação. ■

Tem-se o seguinte resultado:

Lema 2.3. *Sejam $\lambda_0 = m - \dfrac{n}{p}$ com $0 < \lambda_0 \leq 1$, U_r um paralelepípedo do R^n de lados paralelos aos eixos coordenados e cada lado de comprimento $r > 0$ e $x_0 \in U_r$. Então*

$$\left| \varphi(x_0) - \frac{1}{r^n} \int_{U_r} \varphi(z)\, dz \right| \leq \frac{1}{\lambda}\, r^\lambda \sum_{i=1}^n \|D_i \varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

onde

a) $\lambda = \lambda_0$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m-1}{n}$ se $\lambda_0 < 1$,

b) $0 < \lambda < 1$ e $q = \dfrac{n}{1-\lambda}$ se $\lambda_0 = 1$.

Observação 2.10. No caso **a)** tem-se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m-1}{n} > 0$ pois $\lambda_0 < 1$ e no caso **b)**, $\dfrac{n}{1-\lambda} > p$ pois $\lambda_0 = 1$.

Demonstração do Lema: Seja $z \in U_r$ e $u(t) = \varphi(tz + [1-t]\, x_0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\varphi(z) - \varphi(x_0) = u(1) - u(0) = \int_0^1 u'(t)\, dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 D_i \varphi(tz + [1-t]x_0)(z_i - x_{oi})dt$$

que implica

$$|\varphi(z)-\varphi(x_0)| \leq r\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 |D_i\varphi\left(tz+[1-t]x_0\right)|\, dt.$$

Notando que $\varphi(x_0)=\dfrac{1}{r^n}\displaystyle\int_{U_r}\varphi(x_0)\,dz$ e usando esta última desigualdade, obtém-se:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{r^n}\int_{U_r}\varphi(z)\,dz-\varphi(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{r^n}\int_{U_r}\left[\varphi(z)-\varphi(x_0)\right]\,dz\right| \\ &\leq r^{1-n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{U_r}|D_i\varphi\left(tz+[1-t]x_0\right)|\,dzdt.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Fazendo $y=tz+(1-t)x_0$ resulta

$$\begin{aligned}\int_{U_r}|D_i\varphi\left(tz+[1-t]x_0\right)|\,dz &= \int_{(1-t)x_0+tU_r}|D_i\varphi(y)|\,t^{-n}\,dy = \\ &= t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|D_i\varphi\,(y)|\,\chi_{(1-t)x_0+tU_r}(y)\,dy\end{aligned}$$

onde $\chi_{(1-t)x_0+tU_r}$ é a função característica do conjunto $(1-t)x_0+tU_r$. Aplicando a desigualdade de Hölder $\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\beta'}=1\right)$ nesta última igualdade, vem:

$$\int_{U_r}|D_i\varphi\left(tz+[1-t]x_0\right)|\,dz \leq t^{-n}\left\|D_i\varphi\right\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}\left(t^nr^n\right)^{1/\beta'}. \tag{2.26}$$

Combinando (2.25) e (2.26) resulta

$$\left|\varphi(x_0)-\frac{1}{r^n}\int_{U_r}\varphi(z)\,dz\right| \leq r^{1-n+\frac{n}{\beta'}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|D_i\varphi\right\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}\right)\int_0^1 t^{-n+\frac{n}{\beta'}}\,dt.$$

Observando que $1-n+\dfrac{n}{\beta'}=1-\dfrac{n}{\beta}$ obtém-se desta última desigualdade

$$\left|\varphi(x_0)-\frac{1}{r^n}\int_{U_r}\varphi(z)\,dz\right| \leq r^{1-\frac{n}{\beta}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|D_i\varphi\right\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}\right)\int_0^1 t^{-n/\beta}\,dt. \tag{2.27}$$

Fazendo $\beta=q$ em (2.27) obter-se-á o lema. Com efeito:
Caso a). Considere $\beta=q,\quad q=np/\left(n-[m-1]p\right)$, em (2.27). Então notando que $1-\dfrac{n}{q}=m-\dfrac{n}{p}=\lambda_0$, portanto $\displaystyle\int_0^1 t^{-n/q}\,dt=1/\lambda_0$, obtém-se:

$$\left|\varphi(x_0)-\frac{1}{r^n}\int_{U_r}\varphi(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{\lambda_0}\,r^{\lambda_0}\sum_{i=1}^{n}\left\|D_i\varphi\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Caso b). Seja $0 < \lambda < 1$ e $\beta > 1$ tal que $1 - \dfrac{n}{\beta} = \lambda$. Então $\beta = n/(1-\lambda)$, $\beta = q$ e $\int_0^1 t^{-n/\beta}\, dt = 1/\lambda$. Fazendo $\beta = \dfrac{n}{1-\lambda}$ em (2.27) resulta então

$$\left|\varphi(x_0) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} \varphi(z)\, dz\right| \leq \frac{1}{\lambda}\, r^{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

concluindo-se a demonstração. ■

Lema 2.4. *Sob as hipóteses do Lema* 2.3, *tem-se:*

$$\left|\varphi(x_0) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} \varphi(z)\, dz\right| \leq C\, r^{\lambda}\, \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

onde $C > 0$ *é uma constante independente de* φ, r, x_0 *e*

a) $\lambda = \lambda_0$ se $\lambda_0 < 1$,

b) $0 < \lambda < 1$ se $\lambda_0 = 1$.

O Lema 2.4 é uma conseqüência direta do Lema 2.3 e do fato que $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ em ambos os casos *a)* e *b)*. Para o primeiro caso note que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m-1}{n} > 0$ e para o segundo caso, que $(m-1)p = n$ e $q > p$. (Ver Observação 2.10).

Teorema 2.8. *Seja* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$, k *um inteiro não negativo. Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

onde

a) $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ se $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,

b) $0 < \lambda < 1$ se $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

Observação 2.11. Sejam $n \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e N o subespaço fechado de $W^{m,p}(\Omega)$ defnido por

$$N = \{u \in W^{m,p}(\Omega)\ ;\ u = 0 \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Com N define-se a relação de equivalência

$$u \sim v \text{ se e somente se } u - v \in N.$$

O espaço quociente $Z = W^{m,p}(\Omega)/N$ está constituído então pelas classes de equivalência

$$[u] = \{v \in W^{m,p}(\Omega)\ ;\ v = u \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

O conjunto Z com as operações usuais de classes de equivalência transforma-se em um espaço vetorial e com a norma

$$||\,[u]\,||_Z = \inf\left\{\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}\ ;\ v = u \text{ q.s. em } \Omega\right\}$$

num espaço de Banach.

Sejam $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, $\Omega = \mathbb{R}^n$, $mp > n$ e $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$. A rigor, o Teorema 2.8 mostra o seguinte:

a) A cada classe de equivalência $[u]$ corresponde um único $v \in C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, tal que v é equivalente a u, isto é, $v = u$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$.

b) A aplicação

$$\begin{array}{ccc} W^{m,p}(\mathbb{R}^n)/N & \longrightarrow & C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n) \\ [u] & \longmapsto & v \end{array}$$

é linear, injetora e contínua (λ na condição **a)** ou **b)**).

Quando se diz que se $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$, então $u \in C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, está querendo se dizer que no lugar de u está considerando-se seu equivalente $v \in C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Neste sentido, diz-se que u depois de uma eventual modificação num conjunto de medida nula transforma-se numa função pertencente a $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Todo o anterior pode ser sintetizado escrevendo $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

O mesmo tipo de síntese aplica-se para os casos $n = 1$, $p = \infty$ e Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.

Demonstração do Teorema: Tem-se

$$0 < m - k - \frac{n}{p} = \lambda_0 \leq 1. \tag{2.28}$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$; e U_r um paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$ de lados paralelos aos eixos coordenados e cada lado de comprimento $r = 2\|x-y\|$ contendo x, y. Pelo Lema 2.4, para cada $|\alpha| \leq k$, obtém-se:

$$\begin{aligned} |D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)| &= \left|D^\alpha\varphi(x) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} D^\alpha\varphi(z)dz + \frac{1}{r^n}\int_{U_r} D^\alpha\varphi(z)dz - D^\alpha\varphi(y)\right| \leq \\ &\leq 2C\left(2\|x-y\|\right)^\lambda \|D^\alpha\varphi\|_{W^{m-k,p}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

isto é,

$$|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)| \leq C_1 \|x-y\|^\lambda \, \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq k \tag{2.29}$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante independente de φ, x, y e λ com

$$\lambda = \lambda_0 \quad \text{se} \quad \lambda_0 < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \lambda < 1 \quad \text{se} \quad \lambda_0 = 1, \tag{2.30}$$

λ_0 definido por (2.28).

Por outro lado, seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e U_r um paralelepípedo do $\mathbb{R}^n$, nas condições do Lema 2.3, de volume igual a um e que contém x. Então do Lema 2.4, com $|\alpha| \leq k$, resulta:

$$\begin{aligned} |D^\alpha\varphi\,(x)| \ &\leq \left| D^\alpha\varphi\,(x) - \int_{U_r} D^\alpha\varphi\,(z)\,dz \right| + \left| \int_{U_r} D^\alpha\varphi\,(z)\,dz \right| \leq \\ &\leq C\,\|D^\alpha\varphi\|_{W^{m-k,p}(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{U_r} |D^\alpha\varphi\,(z)|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

isto é,

$$|D^\alpha\varphi\,(x)| \leq C_2 \,\|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ |\alpha| \leq k \tag{2.31}$$

onde $C_2 > 0$ é uma constante independente de φ e x.

Seja $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ então pelo Teorema 2.1, existe uma sucessão (φ_μ) de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi_\mu \to u \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.32}$$

e

$$\varphi_\mu \to u \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n. \tag{2.33}$$

De (2.31) resulta

$$|D^\alpha\varphi_\mu\,(x) - D^\alpha\varphi_\sigma\,(x)| \leq C_2\,\|\varphi_\mu - \varphi_\sigma\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ |\alpha| \leq k.$$

Desta expressão e da convergência (2.32) vem que (φ_μ) é uma sucessão de Cauchy no espaço de Banach $C_b^k\,(\mathbb{R}^n)$, portanto, existe $v \in C_b^k\,(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi_\mu \to v \quad \text{em} \quad C_b^k(\mathbb{R}^n). \tag{2.34}$$

As convergências (2.33) e (2.34) permitem identificar u com v, mais precisamente, u depois de uma eventual modificação num conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^n$, transforma-se em v (ver Observação 2.11). Do fato que se duas funções contínuas v e w são iguais quase sempre em $\mathbb{R}^n$ então $v\,(x) = w\,(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vem que v com a regularidade requerida é único na classe de equivalência determinada por u. Assim

$$\varphi_\mu \to u \quad \text{em} \quad C_b^k(\mathbb{R}^n). \tag{2.35}$$

Escrevendo (2.29) e (2.31) com φ_μ e tomando o limite em ambas as expressões, vem das convergências (2.32) e (2.35):

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C_1 \|x-y\|^\lambda \; \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq k$$

com λ nas condições (2.30), e

$$|D^\alpha u(x)| \leq C_2 \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ |\alpha| \leq k.$$

Estas duas últimas desigualdades e a Observação 2.9 implicam que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)/N \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, isto é, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Assim o teorema está demonstrado. ■

O Teorema 2.8 e a Observação 2.9 acarretam:

Corolário 2.6. *Sob as hipóteses do Teorema* 2.8, *tem-se:*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n).$$

2.2.4 Caso $n = 1$

Neste caso obtém-se uma melhor regularidade para as funções de $W^{m,p}(\mathbb{R})$.

Teorema 2.9. *Tem-se com* $m \geq 1$*:*

a) $W^{m,p}(R) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(R)$ com $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$ se $p > 1$,

b) $W^{m,p}(R) \hookrightarrow C_b^{m-1}(R)$ se $p = 1$.

Observação 2.12. A rigor no Teorema 2.9 considera-se o espaço quociente $W^{m,p}(\mathbb{R})/N$ no lugar do espaço $W^{m,p}(\mathbb{R})$. Ver Observação 2.11.

Demonstração do Teorema 2.9: Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $y > x$ e j um inteiro não negativo. Então

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(y)\right| \leq \int_x^y \left|\varphi^{(j+1)}(t)\right| dt = \int_{\mathbb{R}} \left|\varphi^{(j+1)}(t)\right| \chi_{]x,y[}(t)\; dt \tag{2.36}$$

onde $\chi_{]x,y[}$ é a função característica do intervalo aberto $]x,y[$. Seja I um intervalo aberto da reta de comprimento r e $x \in I$. Tem-se:

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r}\int_I \varphi^{(j)}(z)\, dz\right| \leq \frac{1}{r}\int_I \left|\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(z)\right| dz$$

donde, por (2.36),

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r}\int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| \le \frac{1}{r}\int_I \int_{\mathbb{R}} \left|\varphi^{(j+1)}(t)\right| \chi_{]x,z[}(t)\,dtdz. \tag{2.37}$$

Caso a) De (2.36) segue

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(y)\right| \le \left\|\varphi^{(j+1)}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} |x-y|^{1/p'} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

isto é,

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(y)\right| \le \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R})} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}, \qquad \forall\, j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.38}$$

De (2.37) resulta

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r}\int_I \varphi^{(j)}(z)dz\right| \le \frac{1}{r}\int_I \left\|\varphi^{(j+1)}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} |x-z|^{1/p'}\,dz$$

isto é,

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r}\int_I \varphi^{(j)}(z)dz\right| \le r^{1-\frac{1}{p}} \left\|\varphi^{(j+1)}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ e I um intervalo aberto da reta de comprimento um e que contenha x. Da última desigualdade resulta

$$\begin{aligned}\left|\varphi^{(j)}(x)\right| &\le \left|\varphi^{(j)}(x) - \int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| + \left|\int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| \le \\ &\le \left\|\varphi^{(j+1)}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} + \left\|\varphi^{(j)}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|\varphi^{(j)}(x)\right| \le \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R})}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.39}$$

A seguir, de posse das estimativas (2.38) e (2.39), procede-se como na demonstração do Teorema 2.8.

Caso b) De (2.37) vem

$$\left|\varphi^{(j)}(x) - \frac{1}{r}\int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| \le \left\|\varphi^{(j+1)}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Conseqüentemente considerando I de comprimento um e contendo x, resulta

$$\begin{aligned}\left|\varphi^{(j)}(x)\right| &\le \left|\varphi^{(j)}(x) - \int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| + \left|\int_I \varphi^{(j)}(z)\,dz\right| \le \\ &\le \left\|\varphi^{(j+1)}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left\|\varphi^{(j)}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|\varphi^{(j)}(x)\right| \le \|\varphi\|_{W^{m,1}(\mathbb{R})}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

A demonstração prossegue como no Caso a). ■

2.2.5 Caso $p = \infty$

Nesta seção mostra-se o seguinte resultado:

Teorema 2.10. *Para $n \geq 1$ e $m \geq 1$ tem-se que*

$$W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n) \text{ é isomorfo a } C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 2.13. Em verdade, o Teorema 2.43 mostra que o espaço quociente $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)/N$ é isomorfo a $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$. Ver Observação 2.11.

Demonstração do Teorema 2.10: Faz-se a demonstração em duas etapas:

Primeira Etapa: Nesta parte mostra-se que $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$. Para isto, de início, prova-se que se $u \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$ então $u \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ e vale a desigualdade

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\,\|x-y\|\,\|u\|_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.40}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $|\alpha| \leq m-1$, onde $C > 0$ é uma constante independente de u. Mostra-se este resultado por indução com relação a $m \geq 1$. Seja então $m = 1$ e considere $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. De início analisa-se o caso $n \geq 2$. O caso $n = 1$ seguirá de forma análoga. Seja $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\theta(x) = 1 \quad \text{para} \quad \|x\| \leq 1, \qquad \theta(x) = 0 \quad \text{para} \quad \|x\| \geq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Considere $\theta_\mu(x) = \theta(x/\mu)$ para μ inteiro positivo. Então

$$\theta_\mu(x) = 1 \quad \text{para} \quad \|x\| \leq \mu \text{ e } \theta_\mu(x) = 0 \quad \text{para} \quad \|x\| \geq 2\mu.$$

Seja $p > n$ então $0 < 1 - \dfrac{n}{p} = \lambda_0 < 1$. Tem-se que $\theta_\mu u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, para todo μ, portanto, pelo Teorema 2.8, resulta que $\theta_\mu u \in C^{0,\lambda_0}(\mathbb{R}^n)$, para todo μ. Disto vem que u é contínua em $\mathbb{R}^n$. Observe-se também que é válida a desigualdade

$$\left|(\theta_\mu u)(x_0) - \frac{1}{r^n}\int_{U_r} (\theta_\mu u)(z)\,dz\right| \leq \frac{1}{\lambda_0}\, r^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} ||D_i(\theta_\mu u)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.41}$$

onde x_0 é um ponto qualquer do paralelepípedo U_r. Este resultado é obtido quando se considera a desigualdade do Lema 2.3 com (φ_σ) sucessão de funções testes em $\mathbb{R}^n$ com $\varphi_\sigma \to \theta_\mu u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, e toma-se o limite nesta desigualdade.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, μ um inteiro não negativo tal que $\|x\| \leq \mu$, $\|y\| \leq \mu$, e $r = 2\|x-y\|$. Então por (2.41) resulta

$$|u(x) - u(y)| = |(\theta_\mu u)(x) - (\theta_\mu u)(y)| \leq \frac{2}{\lambda_0}\,(2\,\|x-y\|)^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} \|D_i(\theta_\mu u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

isto é,

$$|u(x)-u(y)| \leq \frac{2^{1+\lambda_0}}{\lambda_0}\ \|x-y\|^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} \|D_i\,(\theta_\mu u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \left(\lambda_0 = 1-\frac{n}{p}\right). \tag{2.42}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |D_i(\theta_\mu u)\,(x)|^p\ dx &\leq \frac{2^p}{\mu^p}\int_{B_{2\mu}(0)} |D_i\theta\,(x/\mu)|^p\ |u(x)|^p\ dx+ \\ &+ 2^p\int_{B_{2\mu}(0)} |\theta_\mu(x)|^p\ |D_i u(x)|^p\ dx\end{aligned}$$

onde $B_{2\mu}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 2\mu\}$, que implica

$$\begin{aligned}\|D_i\,(\theta_\mu u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq 2\left[\max_{x\in\mathbb{R}^n} |D_i\theta(x)|\right] \|u\|_{L^p(B_{2\mu}(0))} + 2\,\|D_i u\|_{L^p(B_{2\mu}(0))} \leq \\ &\leq C(\theta)\,\|u\|_{L^p(B_{2\mu}(0))} + 2\,\|D_i u\|_{L^p(B_{2\mu}(0))}\end{aligned}$$

Substituindo esta desigualdade em (2.42) resulta

$$|u(x)-u(y)| \leq \frac{2^{1+\lambda_0}}{\lambda_0}\ \|x-y\|^{\lambda_0}\left[nC(\theta)\,\|u\|_{L^p(B_{2\mu}(0))} + 2\sum_{i=1}^{n}\|D_i u\|_{L^p(B_{2\mu}(0))}\right]. \tag{2.43}$$

Observe que se $v \in L^\infty(B_{2\mu}(0))$ então

$$\left(\int_{B_{2\mu}(0)} |v\,(x)|^p\ dx\right)^{1/p} \leq \|v\|_{L^\infty(B_{2\mu}(0))}\ (\text{vol}\ B_{2\mu}(0))^{1/p}$$

que implica

$$\limsup_{p\to\infty} \|v\|_{L^p(B_{2\mu}(0))} \leq \|v\|_{L^\infty(B_{2\mu}(0))}\ .$$

Tomando o limite superior em p na desigualdade (2.43) e levando em consideração esta última observação, obtém-se

$$|u(x)-u(y)| \leq 4\,\|x-y\|\left[n\,C(\theta)\,\|u\|_{L^\infty(B_{2\mu}(0))} + 2\sum_{i=1}^{n}\|D_i u\|_{L^\infty(B_{2\mu}(0))}\right]$$

que implica

$$|u(x)-u(y)| \leq C\,\|x-y\|\ \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}$$

que mostra a desigualdade (2.40) para $m = 1$.

Para o caso $n = 1$, tem-se a desigualdade

$$|u(x) - u(y)| = |(\theta_\mu u)(x) - (\theta_\mu u)(y)| \leq |x - y|^{\lambda_0} \left\| \frac{d}{dx} (\theta_\mu u) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \left(\lambda_0 = 1 - \frac{1}{p} \right)$$

a qual vem de (2.38). A demonstração de (2.40) prossegue então como no caso $n \geq 2$.

Suponha que a desigualdade (2.40) é válida para $m \geq 1$. Considere $m + 1$ e $u \in W^{m+1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Seja $p > n$ então $m < (m+1) - \dfrac{n}{p} < m+1$. Pelo Teorema 2.8 e por análogo raciocínio ao feito acima vem que $u \in C^{m,\lambda_0}(\mathbb{R}^n)$. Seja $|\alpha| \leq m$. Considere um multi-índice β tal que $|\beta| = |\alpha| - 1$ e $D^\beta D_i u = D^\alpha u$. Como $D_i u \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $|\beta| \leq m - 1$ vem da hipótese de indução que

$$\left| D^\beta (D_i u)(x) - D^\beta (D_i u)(y) \right| \leq C \|x - y\| \, \|D_i u\|_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)}$$

isto é,

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C \|x - y\| \, \|u\|_{W^{m+1,\infty}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

que mostra (2.40) para $m + 1$.

Da desigualdade (2.40) e notando que $\|u\|_{C_b^{m-1}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)}$ segue a primeira etapa. ■

Segunda Etapa: Nesta parte mostra-se que $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Prova-se primeiro que

$$C^{0,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{2.44}$$

Com efeito, seja $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ então $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|x - y\|, \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.45}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de x e y. Mostrar-se-á que

$$D_i u \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

De início estuda-se o caso $n \geq 2$. O caso $n = 1$ seguirá de forma análoga. Prova-se que $D_1 u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por argumentos análogos seguirá que $D_i u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i = 2, ..., n$. De fato, sejam $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ o vetor unitário de $\mathbb{R}^n$, e

$$D_1^h u(x) = \frac{u(x + he_1) - u(x)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}, \, h \neq 0.$$

Sejam (h_μ) uma sucessão de números reais com $h_\mu \neq 0$, para todo μ, tal que $h_\mu \to 0$ quando $\mu \to \infty$ e (u_μ) a sucessão de funções definidas por $u_\mu(x) = D_1^{h_\mu} u(x)$. Vem de (2.45) que (u_μ) é uma sucessão limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, logo existe uma subsucessão $(u_{\mu'})$ de (u_μ) e $v_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$D_1^{h_{\mu'}} u \to v_1 \text{ fraco-}* \text{em } L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ quando } \mu' \to \infty. \tag{2.46}$$

Considere $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ então

$$\langle D_1 u, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, D_1\varphi(x)\, dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, D_1^{-h_{\mu'}}\varphi(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, D_1\varphi(x)\, dx, \text{ quando } \mu' \to \infty \tag{2.47}$$

pois $\left(D_1^{-h_{\mu'}}\varphi\right)$ converge uniformemente para $D_1\varphi$, quando $\mu' \to \infty$, nos compactos de $\mathbb{R}^n$, em particular para um compacto K que contenha os suportes de $D_1\varphi$ e de $D_1^{-h_{\mu'}}\varphi$, para todo μ'. Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_1^{h_{\mu'}} u(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, D_1^{-h_{\mu'}}\varphi(x)\, dx.$$

Disto e do limite (2.47) vem que

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_1^{h_{\mu'}} u(x)\, \varphi(x)\, dx \to -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, D_1\varphi(x)\, dx \text{ quando } \mu' \to \infty$$

e do limite (2.46),

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_1^{h_{\mu'}} u(x)\, \varphi(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^n} v_1(x)\, \varphi(x)\, dx \text{ quando } \mu' \to \infty$$

portanto

$$-\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, D_1\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} v_1(x)\, \varphi(x)\, dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

isto é, $D_1 u = v_1$. Assim $D_1 u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Disto e de (2.46) resulta

$$\|D_1 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf \left\| D_1^{h_{\mu'}} u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.48}$$

Por outro lado,

$$L_u = \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|} \geq \frac{|u(x + h_{\mu'} e_1) - u(x)|}{|h_{\mu'}|} = \left| D_1^{h_{\mu'}} u(x) \right|$$

portanto
$$L_u \geq \left\| D_1^{h_{\mu'}} u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$
Tomando o limite inferior com relação a μ' a ambos os membros desta desigualdade e observando (2.48) obtém-se que
$$\|D_1 u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq L_u.$$
De forma análoga mostra-se que $D_i u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e
$$\|D_i u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq L_u, \quad i = 2, ..., n.$$
Assim
$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + n \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|}$$
que implica
$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq n \|u\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.49}$$
que mostra a imersão contínua (2.44).

A seguir mostra-se o caso geral. Seja $u \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$, então da imersão (2.44) e da desigualdade (2.49) vem que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq m-1$ resulta $D^\alpha u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ e
$$\|D^\alpha u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq n \|D^\alpha u\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}.$$
Logo
$$\sum_{|\alpha|\leq m-1} \|D^\alpha u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq n \sum_{|\alpha|\leq m-1} \|D^\alpha u\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)}$$
que implica
$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)}$$
onde $C > 0$ é uma constante independente de u. Assim o teorema está mostrado. ■

Uma desigualdade importante, cuja demonstração não será feita neste texto introdutório, é a seguinte:

Teorema 2.11. *(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). Sejam* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *e* j, m *dois números inteiros verificando* $0 \leq j < m$. *Se*
$$\frac{1}{q} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n}\right) + \frac{(1-a)}{r}$$

para algum $a \in \left[\dfrac{j}{m}, 1\right]$ $\left(a < 1 \text{ se } p > 1 \text{ e } m - j - \dfrac{n}{p} = 0\right)$ *então existe uma constante* $C = C(n, m, j, p, q, r)$ *tal que*

$$\sum_{|\alpha|=j} ||D^\alpha \varphi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^a ||\varphi||^{1-a}_{L^r(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $\varphi \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em A. Friedman [8], p. 24.

Como conseqüência do teorema acima, obtém-se o seguinte resultado:

Corolário 2.7. *Tem-se:*

a) *Sob as hipóteses do Teorema* 2.11 *com a restrição* $p, q, r < \infty$*, obtém-se que existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sum_{|\alpha|=j} ||D^\alpha u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^a ||u||^{1-a}_{L^r(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)$.

b) *Seja* $1 \leq p < \infty$ e j, m inteiros com $0 \leq j < m$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||u||_{W^{j,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C ||u||^{j/m}_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} ||u||^{\frac{m-j}{m}}_{L^p(\Omega)}, \; \forall\, u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

A parte **a)** do Corolário 2.7 é conseqüência do Teorema 2.11 e da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ no espaço $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n)$ (ver demonstração do Teorema 2.1 e Observação 2.2). A parte **b)** do Corolário 2.7 é obtida diretamente do Teorema 2.11 fazendo-se $p = q = r$ e $a = j/m$.

Uma demonstração simples da parte b) do Corolário 2.7 será feita na Proposição 2.78 para o caso particular $p = 2$ porém j não necessariamente um inteiro.

Um resultado na mesma ordem de idéias do Teorema 2.11 é o seguinte:

Teorema 2.12. *(Browder). Suponha que* Ω *é um aberto do* R^n *de classe* C^{2m} *(*Ω *não necessariamente limitado). Sejam* $1 \leq p, q, r < \infty$ *números reais e* j, m *números inteiros com* $0 \leq j < 2m$*, verificando*

$$\frac{j}{n} + \left(\frac{1}{p} - \frac{2m}{n}\right) < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}, \;\; r \leq q.$$

Então existe uma constante $C = C(j, 2m, q, r, \Omega)$ *tal que*

$$||u||_{W^{j,p}(\Omega)} \leq C||u||^{\lambda}_{W^{2m,p}(\Omega)}\,||u||^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}\,, \quad \forall\, u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$$

onde

$$\lambda = \frac{nr - jqr - qn}{nr - jqr - qn + \rho}\,, \qquad \rho = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} - \frac{(2m-j)}{n}\,.$$

A demonstração do Teorema 2.12 pode ser encontrada em F. Browder [4].

2.3 Prolongamento

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Neste parágrafo estuda-se o prolongamento ao $\mathbb{R}^n$ das funções u definidas em Ω, tudo no contexto dos espaços de Sobolev, mais precisamente, determina-se um operador linear e contínuo

$$P\colon W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \quad \text{tal que} \quad Pu|_{\Omega} = u \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Na Seção 2.3.1 do Capítulo 2 analiza-se o prolongamento para o caso em que Ω é o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$ e na Seção 2.3.2 do Capítulo 2, para o caso Ω aberto-limitado de classe C^m.

Por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ representa-se a restrição a $\overline{\Omega}$ das funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e por $C^m(\overline{\Omega})$ a restrição a $\overline{\Omega}$ das funções de $C^m(\mathbb{R}^n)$ que possuem suporte compacto.

2.3.1 Caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

Denota-se por $\mathbb{R}^n_+$ ao semi espaço

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}.$$

Faz-se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Representa-se um vetor x do $\mathbb{R}^n$ como sendo $x = (x', x_n)$,

A seguir dar-se-á um resultado de densidade que é central no desenvolver das idéias deste parágrafo.

Proposição 2.12. $D(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *é denso em* $W^{m,p}(R^n_+)$*, sendo* $1 \leq p < \infty$*.*

Demonstração: **Primeira Etapa** - Aproximação por funções com suporte limitado.

Seja θ uma função teste no $\mathbb{R}^n$ tal que $\theta(x) = 1$ se $\|x\| \leq 1$, $\theta(x) = 0$ para $\|x\| \geq 2$ e $0 \leq \theta \leq 1$. Para todo $k = 1, 2, \ldots$ considere-se $\theta_k(x) = \theta(x/k)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dada uma função u em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, seja

$$u_k(x) = \theta_k(x) u(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ .$$

Repetindo o mesmo argumento usado no Teorema 2.1 da Seção 2.1.2, conclui-se que a sucessão (u_k) converge para u no espaço $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Além disso,

$$\operatorname{supp}(u_k) \subset \operatorname{supp}\left(\theta_k|_{\mathbb{R}^n_+}\right) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0, \|x\| \leq 2k\}$$

isto é, $\operatorname{supp} u_k$ é um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n_+$, para todo k.

Segunda Etapa - Aproximação por funções de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, restritas a $\mathbb{R}^n_+$.

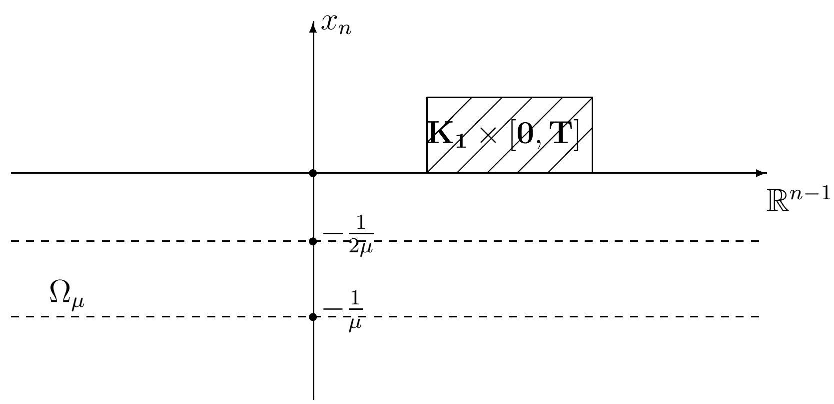
Seja $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ tal que $\operatorname{supp} u$ seja um limitado de $\mathbb{R}^n_+$. Mostrar-se-á que existe uma sucessão (ω_μ) de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega_\mu|_{\mathbb{R}^n_+} \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Sejam K_1 um compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$ e $T > 0$ tais que $\operatorname{supp} u \subset K_1 \times [0, T]$. Para todo $\mu = 1, 2, \ldots$ sejam:

$$\Omega_\mu = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > -1/\mu\} = \mathbb{R}^{n-1} \times]-1/\mu, \infty[$$

$\rho_\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\rho_\mu = 1$ em $K_1 \times [0, T]$ e $\operatorname{supp}(\rho_\mu) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \left[-\dfrac{1}{2\mu}, \infty\right[$,

$$\begin{aligned} &u_\mu(x) = u\left(x', x_n + \frac{1}{\mu}\right) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega_\mu, \\ &v_\mu(x) = \rho_\mu(x) u_\mu(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega_\mu, \\ &\omega_\mu(x) = \tilde{v}_\mu(x). \end{aligned}$$

Graficamente teria-se



Tem-se as seguintes propriedades:

a) $D^\alpha u_\mu(x', x_n) = (D^\alpha u)\big(x', x_n + \dfrac{1}{\mu}\big)$ para quase todo $(x', x_n) \in \Omega_\mu$ e para todo $|\alpha| \leq m$.

De fato, se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\mu)$ seja $\psi(x) = \varphi\big(x', x_n - \dfrac{1}{\mu}\big)$ para $x \in \mathbb{R}^n_+$, então ψ é uma função teste em $\mathbb{R}^n_+$ e

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha u_\mu, \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_\mu} u\big(x', x_n + \frac{1}{\mu}\big)(D^\alpha \varphi)(x', x_n) dx' dx_n = \\
\Big(\text{fazendo } y_n = x_n + \frac{1}{\mu}\Big) &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x) D^\alpha \psi(x)\, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} D^\alpha u(x) \psi(x)\, dx = \int_{\Omega_\mu} (D^\alpha u)\big(x', x_n + \frac{1}{\mu}\big) \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

b) $u_\mu\big|_{\mathbb{R}^n_+} \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Observe que se $k_\mu = \big(0, 0, \ldots, 0, -\dfrac{1}{\mu}\big)$, então $(\tau_{k_\mu} \tilde{u})(x', x_n) = \tilde{u}\big(x', x_n + \dfrac{1}{\mu}\big) = \tilde{u}_\mu(x', x_n)$, isto é, $\tau_{k_\mu} \tilde{u} = \tilde{u}_\mu$. Tem-se:

$$\|u_\mu - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = \big\|\tau_{k_\mu} \tilde{u} - \tilde{u}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

e sendo a translação contínua, resulta:

$$\lim_{\mu \to \infty} \|u_\mu - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = 0.$$

De forma análoga, levando em consideração a parte **a)**, obtém-se

$$(\tau_{k_\mu} \widetilde{D^\alpha} u)(x', x_n) = \widetilde{D^\alpha} u\big(x', x_n + \frac{1}{\mu}\big) = \widetilde{D^\alpha u_\mu}(x', x_n)$$

isto é, $\tau_{k_\mu} \widetilde{D^\alpha} u = \widetilde{D^\alpha u_\mu}$, para todo $|\alpha| \leq m$. Por um raciocínio análogo ao feito acima segue então que

$$\|D^\alpha u_\mu - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0, \quad \forall\ |\alpha| \leq m$$

o que mostra a parte **b)**.

c) $\omega_\mu \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\omega_\mu|_{\mathbb{R}^n_+} \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

De fato, sendo

$$\text{supp }(u_\mu) \subset K_1 \times \left]-\frac{1}{\mu}, T - \frac{1}{\mu}\right[\text{ e supp }(\rho_\mu) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq -\frac{1}{2\mu}\right\}$$

tem-se supp $(v_\mu) \subset K_1 \times \left[-\frac{1}{2\mu}, T - \frac{1}{\mu}\right]$ o que demonstra que supp (v_μ) é um compacto de Ω_μ. Também, da parte a) decorre que $v_\mu \in W^{m,p}(\Omega_\mu)$. Estes dois últimos fatos implicam que $\omega_\mu = \tilde{v}_\mu \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Sendo $\omega_\mu\big|_{\mathbb{R}^n_+} = v_\mu\big|_{\mathbb{R}^n_+} = u_\mu\big|_{\mathbb{R}^n_+}$, por ser $\rho_\mu = 1$ em $K_1 \times [0, T]$, tem-se que $\omega_\mu\big|_{\mathbb{R}^n_+} \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Sejam $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ e $\varepsilon > 0$. Da primeira etapa resulta a existência de u_1 em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ tal que $\|u - u_1\|_{m,p} < \varepsilon/3$ e u_1 é de suporte limitado. Da segunda etapa, obtém-se a existência de $u_2 \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\left\|\left(u_2\big|_{\mathbb{R}^n_+}\right) - u_1\right\|_{m,p} < \varepsilon/3$. Sendo $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, existe φ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $||\varphi - u_2||_{m,p} < \varepsilon/3$. Considerando $\psi = \varphi\big|_{\mathbb{R}^n_+}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ e da desigualdade do triângulo decorre que $\|u - \psi\|_{m,p} < \varepsilon$, o que demonstra ser $\mathcal{D}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. ■

Teorema 2.13. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador de prolongamento*

$$P \colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

linear tal que

$$\|Pu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

onde C é uma constante que depende apenas de m, e

$$Pu|_{\mathbb{R}^n_+} = u \quad \textit{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n_+, \quad \forall\, u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Demonstração: Na demonstração do teorema será usado o resultado que segue enunciado sob forma de lema.

Lema 2.5. *Seja u contínua em $\mathbb{R}^n$ tal que a derivada clássica $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ existe em cada ponto de $\mathbb{R}^n_+$ e $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n < 0\}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_n} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\frac{\partial}{\partial x_n} T_u = T_{\frac{\partial u}{\partial x_n}} \quad \textit{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

A demonstração do lema segue por integração por partes.

Seja $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ e

$$(Pv)(x) = \left| \begin{array}{l} v(x) \quad \text{se} \quad x_n > 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{m} c_\mu v(x', -\mu x_n) \quad \text{se} \quad x_n < 0 \end{array} \right.$$

Dado $\alpha = (\alpha', k)$ um multi-índice, com α' possuindo $n-1$ componentes e k um inteiro não negativo, obtém-se:

$$D^\alpha (Pv) = P(D^\alpha v) \quad \text{quando} \quad k = 0.$$

Fazendo $D_n = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, vem:

$$D_n^k(Pv)(x) = \left| \begin{array}{l} (D_n^k v)(x), \qquad x_n > 0 \\ \sum\limits_{\mu=1}^{m} (-\mu)^k \, c_\mu (D_n^k v)(x', -\mu x_n), \quad x_n < 0. \end{array} \right.$$

Escolhendo os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ tais que $\sum\limits_{\mu=1}^{m} (-\mu)^k \, c_\mu = 1$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, as funções $D_n^k(Pv)$ satisfazem as condições do Lema 2.5, logo $D_n^k(Pv) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $k = 1, 2, \ldots, m$, pois $v \in \mathcal{D}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$. Note que $D_n^k (Pv)$ é contínua em $\mathbb{R}^n$ para $k = 1, 2, ..., m-1$, no entanto $D_n^m (Pv)$ não é necessariamente contínua em $\mathbb{R}^n$, porém pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$. $D_n^{m+1}(Pv)$ não pertence necessariamente a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Observe ainda que os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ são as soluções do sistema de equações $AC = \mathbf{1}$ onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & -m \\ (-1)^2 & (-2)^2 & (-3)^2 & \ldots & (-m)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{m-1} & (-2)^{m-1} & (-3)^{m-1} & \ldots & (-m)^{m-1} \end{bmatrix}$$

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^\tau$ e $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\tau$ (τ = transposta). Este sistema possui solução única C pois $\det A$ é um determinante de Vandermonde. Como é conhecido o determinante de Vandermonde

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_m \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & \ldots & y_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{m-1} & y_2^{m-1} & y_3^{m-1} & \ldots & y_m^{m-1} \end{vmatrix}, \quad y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R},$$

é igual a $\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} (y_j - y_i)$.

No caso geral $\alpha = (\alpha', k)$ com $k + |\alpha'| \leq m$, obtém-se

$$D^\alpha Pv = D_n^k \left(P \left(D^{\alpha'} v \right) \right) \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

já que $D^{\alpha'} v$ é um elemento de $\mathcal{D}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$. Resulta então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(Pv)(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| D_n^k \left(P \left(D^{\alpha'} v \right) \right)(x) \right|^p \, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha v(x)|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^n_-} \left| \sum_{\mu=1}^m (-\mu)^k \, c_\mu \, D_n^k \, D^{\alpha'} v\, (x', -\mu x_n) \right|^p \, dx' dx_n \, .$$

Notando que $\left(\sum\limits_{\mu=1}^m a_\mu \right)^p \leq m^{p-1} \sum\limits_{\mu=1}^m a_\mu^p \, , \quad a_\mu \geq 0$, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n_-} \left| \sum_{\mu=1}^m (-\mu)^k \, c_\mu \, D_n^k \, D^{\alpha'} v(x', -\mu x_n) \right|^p \, dx' dx \ \leq$$

$$\leq m^{p-1} \sum_{\mu=1}^m \mu^{mp} \, |c_\mu|^p \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^\alpha v(x', -\mu x_n)|^p \, dx' dx_n \ \leq$$

$$\leq m^{p-1} \sum_{\mu=1}^m \mu^{mp-1} \, |c_\mu|^p \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha v(x)|^p \, dx.$$

Combinando os dois últimos cálculos resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(Pv)(x)|^p \, dx \leq \left(1 + m^{p-1} \sum_{\mu=1}^m \mu^{mp-1} \, |c_\mu|^p \right) \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha v(x)|^p \, dx$$

que acarreta

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(Pv)(x)|^p \, dx \leq \left(1 + m^p \sum_{\mu=1}^m \mu^{mp} \, |c_\mu|^p \right) \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha v(x)|^p \, dx.$$

Portanto

$$\|Pv\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(1 + m \sum_{\mu=1}^m \mu^m |c_\mu| \right) \|v\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)} \ , \quad \forall \, v \in \mathcal{D}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right).$$

Da Proposição 2.12 decorre então que P estende-se a uma aplicação linear contínua

$$P \colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

com P verificando

$$\|Pu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

com $C = \left(1 + m\sum\limits_{\mu=1}^{m} \mu^m\,|c_\mu|\right)^{1/p}$. Resta apenas mostrar que P é um prolongamento.

Seja u em $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ e seja (φ_μ) uma sucessão de funções de $\mathcal{D}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ tal que $\varphi_\mu \to u$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, então $P\varphi_\mu \to Pu$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, logo

$$(P\varphi_\mu)\big|_{\mathbb{R}^n_+} \to (Pu)\big|_{\mathbb{R}^n_+} \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Da definição de P resulta que $P\varphi_\mu\big|_{\mathbb{R}^n_+} = \varphi_\mu$, portanto $Pu\big|_{\mathbb{R}^n_+} = u$ quase sempre em $\mathbb{R}^n_+$, o que demonstra o teorema. ■

Observação 2.14. Sejam $v \in \mathcal{D}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ e K_1 compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$, $T > 0$ tal que $\operatorname{supp}\left(v\big|_{\mathbb{R}^n_+}\right) \subset K_1 \times [0,T]$. Note que $Pv(x', x_n) = 0$ se $x_n < 0$ e $(x', -x_n) \notin K_1 \times [0,T]$. Resulta disto que $\operatorname{supp}(Pv)$ está contido em $K_1 \times [-T,T]$.

2.3.2 Caso Ω Aberto Limitado

Inicialmente fixa-se algumas notações. Sejam Q o retângulo aberto

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n; -1 < y_i < 1,\ i = 1,2,\ldots,n\},$$

Q^+ e Q^- os quadrados abertos

$$Q^+ = Q \cap \{y_n > 0\}, \qquad Q^- = Q \cap \{y_n < 0\},$$

e Σ o segmento aberto $Q \cap \{y_n = 0\}$.

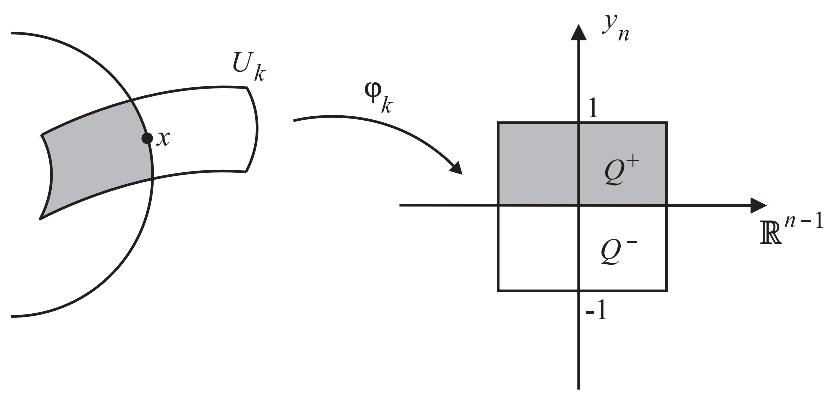
Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Diz-se que Ω *é de classe* C^m $(m = 1,2,\ldots)$ se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^m de dimensão $n-1$ e Ω estando localmente de um mesmo lado de Γ. Se Ω é de classe C^m então existe um sistema de cartas locais (U_k, φ_k), $k = 1,2,\ldots$ para Γ tal que

U_k é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e os U_k cobrem Γ,
$\varphi_k \colon U_k \longrightarrow Q$ é uma bijeção de classe C^m,
$\varphi_k^{-1} \colon Q \longrightarrow U_k$ é de classe C^m,
$\varphi_k(U_k \cap \Omega) = Q^+, \quad \varphi_k(U_k \cap \Gamma) = \Sigma.$

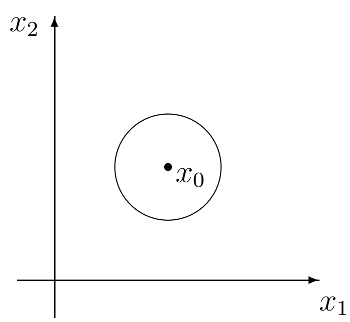
Decorre da última expressão que $\varphi_k(U_k \cap \complement\overline{\Omega}) = Q^-$. Evidentemente as condições de compatibilidade são satisfeitas, isto é, se $U_k \cap U_\ell \neq \varnothing$ então existe um homeomorfismo $J_{k\ell}$ de classe C^m com jacobiano positivo de $\varphi_k(U_k \cap U_\ell)$ sobre $\varphi_\ell(U_k \cap U_\ell)$ tal que

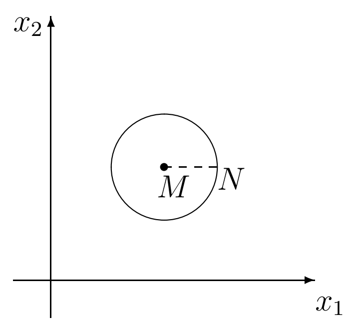
$$\varphi_\ell(x) = J_{k\ell}(\varphi_k(x)), \quad \text{para todo} \quad x \in U_k \cap U_\ell\,.$$

Graficamente teria-se



Não são de classe C^1 os seguintes abertos:





No primeiro exemplo Ω é o disco aberto menos o centro x_0 e no segundo, Ω é o disco aberto menos o raio MN. Claramente $\mathbb{R}^n_+$ é um aberto de classe C^m para todo $m \geq 1$.

Se Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^m podemos escolher um sistema de cartas locais finito

$$(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_N, \varphi_N)$$

para Γ que satisfazem as condições acima.

O aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é denominado *bem regular* se Ω é de classe C^m para todo $m = 1, 2, \ldots$

A seguir fixa-se Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m, e denota-se por Γ sua fronteira. Mostrar-se-á que existe um operador de prolongamento

$$P \colon W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Este resultado é obtido observando-se, por meio de cartas locais, que localmente as funções definidas em Ω, perto da fronteira Γ comportam-se como se estivessem definidas em Q^+. Existindo um operador de prolongamento $P\colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, o prolongamento a $\mathbb{R}^n_+$ das funções definidas em Q^+ (possível graças à introdução de uma partição C^∞ da unidade, ver a continuação) proporcionará o resultado.

Antes de enunciar o teorema central desta seção, introduz-se certas notações e demonstra-se alguns resultados prévios. Com efeito, primeiro constrói-se um sistema finito $\{(U_k, \varphi_k)\}_{1\leq k\leq N}$ de cartas locais para Γ. Considerar que o sistema seja finito é possível pois Γ é compacto em $\mathbb{R}^n$. De posse destas cartas locais, determina-se, aplicando-se o Teorema da Partição C^∞ da Unidade à coleção de abertos $U_1, U_2, \ldots, U_N, \Omega$; uma coleção de funções $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N$ tais que

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \forall\, k = 0, 1, \ldots, N; \\ \text{supp}\ (\sigma_0) \subset \Omega, \quad \text{supp}(\sigma_k) \subset U_k,\ \forall k = 1, ..., N; \\ 0 \leq \sigma_k \leq 1,\ \forall k = 0, 1, ..., N; \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \sigma_k(x) = 1, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \end{array}\right.$$

Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Tem-se que $u = u\sigma_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u\sigma_k$. Observe que $w_0 = u\sigma_0$ tem o prolongamento natural a $\mathbb{R}^n$ por zero fora de Ω. A dificuldade está com os $w_k = \sigma_k u$. Sejam $U_k^+ = U_k \cap \Omega$ e

$$v_k(y) = w_k\left(\varphi_k^{-1}(y)\right), \qquad y \in Q^+.$$

Claramente, $w_k \in W^{m,p}(U_k^+)$. Tem-se o seguinte resultado:

Lema 2.6. *Sejam $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e v_k, w_k definidos como acima. Então $v_k \in W^{m,p}(Q^+)$ e existe uma constante $C_0 = C_0(\sigma_k, \varphi_k, m, n, p) > 0$ independente de u tal que*

$$\|v_k\|_{W^{m,p}(Q^+)} \leq C_0 \|w_k\|_{W^{m,p}(U_k^+)}.$$

Demonstração: Para facilitar a escrita não escrever-se-á o índice k. Sejam $y = \varphi(x)$ e

$$\psi(y) = \varphi^{-1}(y) = (\beta_1(y), \beta_2(y), \ldots, \beta_n(y)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Note que $v(\varphi(x)) = w(x)$ e $|\det(J\varphi(x))| = A(x) > 0$, para todo $x \in U$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{Q^+} |v(y)|^p\, dy &= \int_{U^+} |v(\varphi(x))|^p\, A(x)dx = \int_{\text{supp}\, w} |w(x)|^p\, A(x)dx \leq \\ &\leq \Big(\max_{x\in\,\text{supp}(\sigma)} A(x)\Big) \int_{U^+} |w(x)|^p\, dx. \end{aligned}$$

Também

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}(y) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_\ell}(\psi(y)) \frac{\partial \beta_\ell}{\partial y_i}(y),$$

$$\int_{Q^+} \left| \frac{\partial v}{\partial y_i}(y) \right|^p dy \leq n^{p-1} \sum_{\ell=1}^{n} \int_{U^+} \left| \frac{\partial w}{\partial x_\ell}(x) \right|^p \left| \frac{\partial \beta_\ell}{\partial y_i}(\varphi(x)) \right|^p A(x)dx \leq$$
$$\leq n^{p-1} \left(\max_{1\leq \ell \leq n} \max_{x\in \operatorname{supp}(\sigma)} \left| \frac{\partial \beta_\ell}{\partial y_i}(\varphi(x)) \right|^p \right) \left(\max_{x\in \operatorname{supp}(\sigma)} A(x) \right) \sum_{\ell=1}^{n} \int_{U^+} \left| \frac{\partial w\,(x)}{\partial x_\ell} \right|^p dx.$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j}(y) &= \sum_\ell \left(\sum_r \frac{\partial^2 w}{\partial x_\ell \partial x_r}(\psi(y)) \frac{\partial \beta_r}{\partial y_j}(y) \right) \frac{\partial \beta_\ell}{\partial y_i}(y) + \\ &+ \sum_\ell \frac{\partial w}{\partial x_\ell}(y) \frac{\partial^2 \beta_\ell}{\partial y_i \partial y_j}(y) \end{aligned}$$

e por um procedimento análogo ao anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q^+} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j}(y) \right|^p dy &\leq n^{2(p-1)}\, C_{i,j}(\sigma_k, \varphi_k) \sum_{\ell,r} \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x_\ell \partial x_r} \right\|^p_{L^p(U^+)} + \\ &+ n^{2(p-1)}\, C_{i,j}(\sigma_k, \varphi_k) \sum_\ell \left\| \frac{\partial w}{\partial x_\ell} \right\|^p_{L^p(U^+)}. \end{aligned}$$

Repetindo os mesmos argumentos obtém-se desigualdades do mesmo tipo para as outras derivadas parciais de v. Assim o lema está demonstrado. ■

Seja W o espaço das funções $g \in W^{m,p}(Q^+)$ tais que todas elas se anulam numa vizinhança fixa $\mathcal{O}$ de $\partial Q^+ \backslash \Sigma$, $\mathcal{O}$ subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com $\mathcal{O} \subset Q^+$. Define-se $h(x) = g(\varphi_k(x))$ (para facilitar a escrita omite-se o índice k de $h_k(x)$). Então tem-se o seguinte resultado:

Lema 2.7. *Nas condições acima, $h \in W^{m,p}(U_k^+)$ e existe uma constante $C_1 = C_1(\mathcal{O}, \varphi_k, m, n, p) > 0$, independente de $g \in W^{m,p}(Q^+)$, tal que*

$$\|h\|_{W^{m,p}(U_k^+)} \leq C_1 \|g\|_{W^{m,p}(Q^+)}.$$

Demonstração: Seja $x = \psi(y)$. Então $|\det(J\psi(y))| = B(y) > 0$, para todo $y \in Q$. Tem-se:

$$\int_{U_k^+} |h(x)|^p\, dx = \int_{\operatorname{supp}\ g} |g(y)|^p B(y)\, dy \leq \Big(\sup_{y\in Q^+\backslash \mathcal{O}} B(y) \Big) \int_{Q^+} |g(y)|^p\, dy.$$

Procedendo como no Lema 2.6, obtém-se os resultados desejados. ■

Se em lugar de Q^+, considera-se Q e fixa-se uma vizinhança $\mathcal{O}$ de ∂Q ($\mathcal{O}$ subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com $\mathcal{O} \subset Q$), obtém-se, de forma análoga ao Lema 2.7, o seguinte resultado:

Lema 2.8. *Nas condições acima, $h \in W^{m,p}(U_k)$ e existe uma constante $C_2 = C_2(\mathcal{O}, \varphi_k, m, n, p) > 0$, independente de $g \in W^{m,p}(Q)$, tal que*

$$\|h\|_{W^{m,p}(U_k)} \leq C_2 \|g\|_{W^{m,p}(Q)} .$$

Aplicando os três últimos lemas, obtém-se para Ω resultados análogos aos obtidos para $\mathbb{R}^n_+$. Com efeito:

Proposição 2.13. *Seja Ω aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m. Então $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ sendo $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Então por cartas locais $u = \sigma_0 u + \sum_{k=1}^{N} \sigma_k u$. Seja $w_k = u\sigma_k$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Note que $w_0 \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Fixa-se $k = 0, 1, \ldots, N$. Com $w_k \in W^{m,p}(U_k^+)$ constrói-se $v_k \in W^{m,p}(Q^+)$. Observe que v_k anula-se numa vizinhança $\mathcal{O}$ de $\partial Q^+ \backslash \Sigma$, $\mathcal{O}$ como no Lema 2.8. Então pode-se considerar v_k como pertencendo a $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ (Em verdade, considera-se $\widetilde{v_k}(x) = v_k(x)$ se $x \in Q^+$ e $\widetilde{v_k}(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R}^n_+ \backslash Q^+$, então $\widetilde{v_k} \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Identifica-se $\widetilde{v_k}$ com v_k). Pela seção anterior existe uma sucessão (γ_μ) de funções de $\mathcal{D}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ tal que

$$\gamma_\mu \to v_k \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Seja $\rho \in \mathcal{D}(Q)$ tal que $\rho = 1$ em $Q \backslash \mathcal{O}$. Então

$$\rho\gamma_\mu \to \rho v_k = v_k \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Observe que cada $\rho\gamma_\mu$ se anula numa vizinhança fixa de ∂Q. Seja $\sigma_\mu(x) = \rho\gamma_\mu(\varphi_k(x))$ para $x \in \overline{U_k^+}$ e $\sigma_\mu(x) = 0$ para x fora de $\overline{U_k^+}$. Então os σ_μ restritos a $\overline{\Omega}$ formam uma sucessão de $C^m(\overline{\Omega})$, e pelo Lema 2.7, segue que

$$\sigma_\mu \to w_k \quad \text{em} \quad W^{m,p}(\Omega).$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\xi_k \in C^m(\overline{\Omega})$ tais que $\|\xi_k - w_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \dfrac{\varepsilon}{N+1}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, N$. Então

$$\left\| u - \sum_{k=0}^{N} \xi_k \right\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \sum_{k=0}^{N} \|w_k - \xi_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon$$

que mostra a densidade de $C^m(\overline{\Omega})$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Regularizando as funções de $C^m(\overline{\Omega})$ (ver Teorema 2.1) segue que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. ■

Teorema 2.14. *Sejam Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m, e $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador de prolongamento*

$$P\colon W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \text{ linear}$$

tal que

$$\|Pu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

onde C é uma constante independente de $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e p. Além disso

$$Pu|_\Omega = u \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Então por cartas locais $u = u\sigma_0 + \sum_{k=1}^{N} u\sigma_k$. Com $w_k = u\sigma_k$ constrói-se v_k que se anula numa vizinhança fixa $\mathcal{O}$ de $\partial Q^+ \backslash \Sigma$, $\mathcal{O}$ como no Lema 2.8, $\mathcal{O}$ independente de u. Tem-se que $v_k \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$ e pelo Teorema 2.13, da seção anterior, $Pv_k \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Pela própria construção de P (ver Observação 2.14), note-se que Pv_k tem suporte compacto em Q. Com Pv_k constrói-se $h_k \in W^{m,p}(U_k)$ que se anula numa vizinhança de ∂U_k e h_k restrito a $\overline{U_k^+}$ é igual a w_k. Denotando-se com $\widetilde{h_k}$ o prolongamento de h_k ao $\mathbb{R}^n$ por zero fora de U_k, tem-se, então, dos três últimos lemas e do Teorema 2.13, que

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{h}_k\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|h_k\|_{W^{m,p}(U_k)} \leq C_1\,\|Pv_k\|_{W^{m,p}(Q)} \leq \\ &\leq C_2\,\|v_k\|_{W^{m,p}(Q^+)} \leq C_3\,\|w_k\|_{W^{m,p}(U_k^+)} = C_3\,\|w_k\|_{W^{m,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

onde as diferentes constantes C_i são independentes de u e p. Seja $P_k w_k = \tilde{h}_k$. Então P_k é linear e contínuo. Define-se o operador de prolongamento P como sendo

$$Pu = \tilde{w}_0 + \sum_{k=1}^{N} P_k w_k\,.$$

Tem-se:

$$\|Pu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|w_0\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{N} C\,\|w_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

sendo a constante C independente de u. O teorema segue pelo resultado de densidade da Proposição 2.13. ■

Sejam $S_{n-1} = \{\sigma \in \mathbb{R}^n; \|\sigma\| = 1\}$ e $\sigma_0 \in S_{n-1}$, $\alpha > 0$. Denota-se por $C(\sigma_0, \alpha)$ ao cone

$$C(\sigma_0, \alpha) = \{t\sigma; 0 < t < \infty \text{ e } \|\sigma - \sigma_0\| < \alpha,\ \sigma \in S_{n-1}\}.$$

Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Diz-se que Ω possui a *propriedade do cone* se existe uma cobertura $(U_i)_{1\leq i\leq N}$ da fronteira Γ de Ω verificando:

para cada U_i existe um cone $C(\sigma_{0i}, \alpha_i)$ tal que para todo
$x \in U_i \cap \Omega,\ x + C(\sigma_{0i}, \alpha_i)$ não intersepta $U_i \cap \Gamma$.

Mostra-se (ver [13] e [1]) que os abertos limitados Ω do $\mathbb{R}^n$ com a propriedade do cone possuem a propriedade do (m,p)-prolongamento para todo $m \geq 1$ e $1 < p < \infty$. Este é um resultado devido a A.P. Calderon e baseado em propriedades de integrais singulares de Calderon-Zygmund. Observe que os paralelepípedos abertos do $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do cone. A desvantagem do operador de prolongamento de Calderon é de que este é construído especialmente para $W^{m,p}(\Omega)$ e não pode ser utilizado para prolongar simultaneamente os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ com $0 < k < m$, como é o caso do operador P estudado anteriormente. Esta propriedade de P é importante na obtenção de desigualdades de intepolação para os espaços $W^{m,p}(\Omega)$.

2.4 Imersões dos Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Os teoremas de imersão de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e o operador de prolongamento $P\colon W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ introduzido no Parágrafo 2.3, permitem obter resultados de imersão para os espaços $W^{m,p}(\Omega)$.

Neste parágrafo estudar-se-á as imersões contínuas e as imersões compactas do espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com Ω limitado do $\mathbb{R}^n$.

2.4.1 Imersões Contínuas

Denota-se por $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ ao espaço de Banach das restrições a $\overline{\Omega}$ das funções pertencentes a $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (ver seção 2.2.3), equipado com a norma induzida, isto é,

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\lambda}\,.$$

Teorema 2.15. *Sejam Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, Ω de classe C^m e $1 \leq p < \infty$, então*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\quad 1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp} = p^*$ se $mp < n$;

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\quad 1 \leq q < \infty$ e $mp = n$;

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ se $mp > n$.

No caso **c)**, *k é um inteiro verificando $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$ e λ um real satisfazendo $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p} = \lambda_0$ se $\lambda_0 < 1$ e $0 < \lambda < 1$ se $\lambda_0 = 1$.*

Observação 2.15. No caso **c)** se faz o mesmo tipo de considerações feitas para $\Omega = \mathbb{R}^n$, isto é, a aplicação

$$W^{m,p}(\Omega)/N \to C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}),\ [u] \mapsto v$$

é linear, injetora e contínua. Ver Observação 2.11.

Demonstração do Teorema 2.15: **a)** O Corolário 2.4 diz que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{I} L^q(\mathbb{R}^n)$ é contínua para $p \leq q \leq p^*$. Tem-se a seguinte cadeia de aplicações lineares contínuas:

$$W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{P} W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{I} L^q(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{r_\Omega} L^q(\Omega)$$

que mostra a) para $p \leq q \leq p^*$. O caso $1 \leq q \leq p$ é obtido pelo fato de ter-se $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pois Ω é limitado.

Os casos **b)** e **c)** são obtidos aplicando o raciocínio acima, o Teorema 2.13 e o Teorema 2.8, respectivamente. ■

Teorema 2.16. *Seja I um intervalo aberto limitado da reta e $1 \leq p < \infty$. Então:*

a) $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$ com $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$ se $p > 1$.

b) $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{I})$ se $p = 1$.

Este resultado é obtido aplicando o Teorema 2.9 e a demonstração do Teorema 2.15. Aqui aplica-se também a Observação 2.15.

Teorema 2.17. *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, Ω de classe C^m. Então*

$$W^{m,\infty}(\Omega) \text{ é isomorfo a } C^{m-1,1}(\overline{\Omega}).$$

Observação 2.16. Por considerações análogas às feitas na Observação 2.13 vem que o Teorema 2.17 mostra, em verdade, que o espaço quociente $W^{m,\infty}(\Omega)/N$ é isomorfo a $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração do Teorema 2.17: Primeiro mostra-se que $W^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$. Faz-se a demonstração por indução com relação a m. Seja então $m = 1$. Por ser Ω limitado $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, $\;1 \leq p \leq \infty$. O Teorema 2.14 diz que

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2.50}$$

onde C é uma constante independente de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$. Considere $p > n$. Então pelo Teorema 2.15, parte **c)**, vem que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, isto é, as funções u de $W^{1,\infty}(\Omega)$ são funções contínuas em $\overline{\Omega}$. Aplicando os mesmos argumentos usados para obter (2.42), na demonstração do Teorema 2.10, resulta para $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$,

$$|u(x) - u(y)| = |(Pu)(x) - (Pu)(y)| \leq \frac{2^{1+\lambda_0}}{\lambda_0}\,\|x - y\|^{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} \|D_i(Pu)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

onde $\lambda_0 = 1 - \dfrac{n}{p}$. (Para o caso $n = 1$, obtém-se desigualdade semelhante, ver demonstração do Teorema 2.9). Isto implica

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2^{1+\lambda_0}}{\lambda_0}\,\|x - y\|^{\lambda_0}\; n\,\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\;.$$

Tomando o limite superior quando $p \to \infty$, resulta então

$$|u(x) - u(y)| \leq 4\,\|x - y\|\, n \limsup_{p \to \infty} \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\;. \tag{2.51}$$

Observando que $\limsup\limits_{p \to \infty} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, vem então de (2.50) e (2.51)

$$|u(x) - u(y)| \leq 4n\,C\,\|x - y\|\;\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\;, \quad \forall\, x, y \in \overline{\Omega}$$

que mostra o teorema para $m = 1$.

Suponha o teorema válido para $m \geq 1$. Considere $m + 1$. Seja $p > n$ então $m < (m+1) - \dfrac{n}{p} < m + 1$. Isto implica pelo Teorema 2.15, parte **c)**, que $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$. Seja $|\alpha| \leq m$. Considere um multi-índice β tal que $|\beta| = |\alpha| - 1$ e $D^\beta D_i u = D^\alpha u$. Como $D_i u \in W^{m,\infty}(\Omega)$ vem da hipótese de indução que

$$\left|D^\beta(D_i u)(x) - D^\beta(D_i u)(y)\right| \leq C\,\|x - y\|\;\|D_i u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}$$

para $x, y \in \overline{\Omega}$, portanto

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\,\|x - y\|\;\|u\|_{W^{m+1,\infty}(\Omega)}$$

para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ e todo $|\alpha| \leq m$. Assim $W^{m,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

A seguir mostra-se por $C^{m-1,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,\infty}(\Omega)$. Este resultado seguirá como uma conseqüência da Segunda Etapa da Demonstração do Teorema 2.10. Assim prova-se primeiro a inclusão contínua para $m = 0$. Seja então $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Por definição existe $w \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $w|_{\overline{\Omega}} = u$. Tem-se:

$$|w(x) - w(y)| \leq C||x - y||, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de x e y. Prova-se que $D_1 u \in L^\infty(\Omega)$. Por argumentos análogos obtém-se que $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ para $i = 2, \ldots, n$. Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, o vetor unitário do $\mathbb{R}^n$, e $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Define-se a função $D_1^h u$ com domínio Ω por

$$D_1^h u(x) = \frac{w(x + he_1) - w(x)}{h} \cdot$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então φ pode ser considerada como uma função teste do $\mathbb{R}^n$. A seguir prossegue-se como na Segunda Etapa da Demonstração do Teorema 2.10 tendo-se cuidado de substituir $\mathbb{R}^n$ por Ω. ■

Corolário 2.8. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ sem condições de regularidade na fronteira. Então*

$$W_0^{m,\infty}(\Omega) \text{ é isomorfo a } C^{m-1,1}(\overline{\Omega}).$$

Este resultado é obtido aplicando o raciocínio usado na demonstração do Teorema 2.17 com $Pu = \tilde{u}$ onde $\tilde{u}$ é a extensão de u ao $\mathbb{R}^n$ por zero fora de Ω.

Tem-se a seguinte desigualdade importante:

Teorema 2.18. *(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^m. Considere os números reais $1 \leq p, q, r < \infty$ e j, m inteiros na condição $0 \leq j < m$. Se*

$$\frac{1}{q} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n}\right) + \frac{(1-a)}{r}$$

para algum $a \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$ $\left(a < 1 \text{ se } p > 1 \text{ e } m - j - \frac{n}{p} = 0\right)$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=j} ||D^\alpha u||_{L^q(\Omega)} \leq C||u||^a_{W^{m,p}(\Omega)}\, ||u||^{1-a}_{L^r(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{m,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$.

O teorema acima é conseqüência da parte **a)** do Corolário 2.7, do Teorema 2.14 de Prolongamento e do fato que, por construção, o operador de prolongamento $P\colon W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ também é contínua de $L^r(\Omega)$ em $L^r(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap L^r(\mathbb{R}^n_+)$ e $P\colon W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é o operador de prolongamento definido na Seção 2.3 então $Pv \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e

$$||Pv||_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C||v||_{L^r(\mathbb{R}^n_+)}.$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap L^r(\mathbb{R}^n_+)$.

2.4.2 Imersões Compactas

O resultado central desta seção é o Teorema de Rellich-Kondrachov. Para demonstrá-lo, primeiro prova-se o seguinte resultado:

Lema 2.9. *Se* $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\| \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

onde $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$.

Demonstração: Mostra-se o resultado, inicialmente, para funções $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Tem-se:

$$\varphi(x-h) - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\,\varphi(x-th)\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,(x-th)(-h_i) \right) dt$$

que implica

$$|(\tau_h\varphi)(x) - \varphi(x)| \leq \|h\| \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,(x-th) \right| dt$$

e isto acarreta,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h\,\varphi(x) - \varphi(x)|\;dx \quad &\leq \|h\| \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,(x-th) \right| dxdt\; = \\ &= \|h\| \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,(x) \right| dx \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\| \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.52}$$

Seja $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, então existe uma sucessão (φ_μ) de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_\mu \to u \quad \text{em} \quad W^{1,1}(\mathbb{R}^n), \\ \varphi_\mu \to u \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n, \\ |\varphi_\mu(x)| \leq g(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n, \;\; g \in L^1(\mathbb{R}^n). \end{array} \right.$$

Escrevendo (2.52) com φ_μ , tomando o limite a ambos os membros desta desigualdade e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue no primeiro membro, obtém-se o lema. ■

Observação 2.17. Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe K compacto de Ω tal que $med\,(\Omega \backslash K) < \varepsilon$ (ver Observação 1.1 do Capítulo 1).

Com efeito, seja K_μ o compacto de Ω definido por $K_\mu = \left\{ x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \Gamma) \geq \frac{1}{\mu} \right\}$. Tem-se:

$$K_\mu \subset K_{\mu+1}\,, \;\forall\, \mu \geq 1, \;\text{e}\; \bigcup_{\mu=1}^{\infty} K_\mu = \Omega.$$

Portanto,

$$\chi_{K_\mu} \leq \chi_\Omega \quad \text{e} \quad \lim \chi_{K_\mu}(x) = \chi_\Omega(x), \qquad \forall\, x \in \Omega$$

onde $\chi_{\mathcal{O}}$ é a função característica do conjunto $\mathcal{O}$. Resulta, então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim(med\; K_\mu) = \lim \int_\Omega \chi_{K_\mu}(x)\, dx = \int_\Omega \chi_\Omega(x)\, dx = \; med\; \Omega$$

que mostra a observação.

Teorema 2.19. *(Rellich-Kondrachov). Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p} = p^*$ se $p < n$.

b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < \infty$ se $p = n$.

c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ se $n < p \leq \infty$.

Demonstração: Estudar-se-á primeiro o caso **a)**. O Teorema de Frechet-Kolmogorov (ver K. Yosida [33]) diz que o subconjunto $\mathcal{F}$ de $L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < \infty$, é relativamente compacto em $L^q(\Omega)$ se

i) $\mathcal{F}$ é limitado.

ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto K de Ω tal que

$$\int_{\Omega \backslash K} |u\,(x)|^q \; dx < \varepsilon, \qquad \forall\, u \in \mathcal{F}.$$

iii) Para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $\eta > 0$ tal que se $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \eta$, então

$$\|\tau_h \tilde{u} - \tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_1\,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{F},$$

onde $\tilde{u}$ é a extensão de u a $\mathbb{R}^n$ por zero fora de Ω e $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$.

Seja B um conjunto limitado de $W^{1,p}(\Omega)$. Mostrar-se-á que B satisfaz às três condições de Frechet-Kolmogorov em $L^q(\Omega)$ com $1 \le q < p^*$.

A condição **i)** segue pelo Teorema 2.15, parte **a)**. Estudar-se-á a condição **ii)**. Por se ter $0 < q < p^*$, existe $\rho > 1$ tal que $q = \dfrac{1}{\rho}\, p^*$. Considere $\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{\rho'} = 1$. Aplicando a desigualdade de Hölder resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \backslash K} |u\,(x)|^q \; dx \; &\le \left(\int_{\Omega \backslash K} |u\,(x)|^{q\rho} \, dx \right)^{1/\rho} \left(\int_{\Omega \backslash K} dx \right)^{1/\rho'} \le \\ &\le \|u\|^q_{L^{p^*}(\Omega)} \; \operatorname{med}(\Omega \backslash K)^{1/\rho'} \le C \operatorname{med}(\Omega \backslash K)^{1/\rho'} \le C\, \varepsilon \end{aligned}$$

pois $\operatorname{med}(\Omega \backslash K)^{1/\rho'}$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, ver Observação 2.17. Isto mostra **ii)**.

Verifica-se **iii)**. Seja $\varepsilon_1 > 0$. Escolha K compacto de Ω tal que

$$\left(\int_{\Omega \backslash K} |u\,(x)|^q \; dx \right)^{1/q} < \varepsilon_1/3\,, \quad \forall\, u \in B. \tag{2.53}$$

Este compacto K existe pela parte **ii)**. Sejam $\eta = \operatorname{dist}\,(K, \Gamma)$ (Γ fronteira de Ω) e

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; \operatorname{dist}\,(x, K) \le \eta/3\}\,, \quad K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; \operatorname{dist}(x, K) \le 2\eta/3\}\,.$$

Claramente K_1 e K_2 são subconjuntos compactos de Ω. Observa-se que se $x \in \complement K_1$ e $\|h\| < \eta/3$ então $x - h \in \complement K$. Logo para $\|h\| < \eta/3$ resulta de (2.53)

$$\left(\int_{\complement K_1} |\tilde{u}\,(x-h)|^q \; dx \right)^{1/q} \le \left(\int_{\complement K} |\tilde{u}(x)|^q \; dx \right)^{1/q} = \left(\int_{\Omega \backslash K} |u(x)|^q \; dx \right)^{1/q} < \varepsilon_1/3$$

isto é ,

$$\|\tau_h \tilde{u}\|_{L^q(\complement K_1)} < \varepsilon_1/3, \quad \forall\, u \in B, \; \forall\; \|h\| < \eta/3. \tag{2.54}$$

Sejam $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi = 1$ em K_2, $0 \le \varphi \le 1$ e $\psi = 1 - \varphi$. Então $0 \le \psi \le 1$ e $1 = \varphi + \psi$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \|\tau_h \tilde{u} - \tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \|\tau_h(\varphi\tilde{u} + \psi\tilde{u}) - (\varphi\tilde{u} + \psi\tilde{u})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \\ &\le \|\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|\tau_h(\psi\tilde{u})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|\psi\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Mostra-se que cada um dos três últimos termos de (2.55) é pequeno para $\|h\|$ pequeno. Com efeito, de $\psi = 0$ em K_2, resulta de (2.53):

$$\begin{aligned} \|\psi\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\complement K_2} |\psi(x)\,\tilde{u}(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \le \left(\int_{\complement K_2} |\tilde{u}(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \\ &\le \left(\int_{\Omega\setminus K} |u(x)|^q\,dx\right)^{1/q} < \varepsilon_1/3 \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\psi\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_1/3\,, \qquad \forall\, u \in B. \tag{2.56}$$

Também, dos fatos se $x \in K_1$ então $x - h \in K_2$ com $\|h\| < \eta/3$ e de $\psi = 0$ em K_2, resulta:

$$\|\tau_h(\psi\tilde{u})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\complement K_1} |\psi(x-h)\tilde{u}(x-h)|^q\,dx\right)^{1/q} \le \|\tau_h\tilde{u}\|_{L^q(\complement K_1)}\,.$$

Resulta de (2.54) que

$$\|\tau_h(\psi\tilde{u})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon_1/3\,, \qquad \forall\, u \in B,\ \forall\, \|h\| < \eta/3. \tag{2.57}$$

Aplicando o Lema 2.9 com $u = \varphi\tilde{u}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\le \|h\|\ \|\varphi\tilde{u}\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^n)} = \|h\|\ \|\varphi u\|_{W^{1,1}(\text{supp } \varphi)} \le \\ &\le \|h\|\, C(\varphi, p)\, \|u\|_{W^{1,p}(\text{supp } \varphi)} \le C_1\, \|h\| \end{aligned}$$

isto é,

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C_1||h||, \qquad \forall\, u \in B. \tag{2.58}$$

Seja $\theta \in \,]0,1]$ tal que $\dfrac{1}{q} = \theta + \dfrac{1-\theta}{p^*}$, que existe por se ter $1 \le q < p^*$. Pela desigualdade de interpolação (Proposição 1.1 do Capítulo 1), obtém-se:

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le ||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||^{\theta}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\, ||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.59}$$

Note que

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u})||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x-h)|^{p^*} dx\right)^{1/p^*} = ||u||_{L^{p^*}(\Omega)}$$

portanto

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \big(2||u||_{L^{p^*}(\Omega)}\big)^{1-\theta} \leq C, \qquad \forall\, u \in B. \tag{2.60}$$

De (2.59) e das desigualdades (2.58) e (2.60), obtém-se

$$||\tau_h(\varphi\tilde{u}) - \varphi\tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C||h||^{\theta}, \qquad \forall\, u \in B. \tag{2.61}$$

Usando-se as desigualdades (2.56), (2.57) e (2.61) em (2.55) resulta

$$||\tau_h\tilde{u} - \tilde{u}||_{L^q(\mathbb{R}^n)} < C\,\varepsilon_1\,, \qquad \forall\, u \in B,\ \forall\, ||h|| < \eta,$$

que mostra a parte **iii)**. Assim B é relativamente compacto em $L^q(\Omega)$.

Demonstração do caso **b)**: Aplique o raciocínio usado na demonstração do caso **a)**, com, por exemplo, $p^* = 2q$.

Demonstração do caso **c)**: Tem-se $0 < 1 - \dfrac{n}{p} = \lambda_0 \leq 1$. Então pelo Teorema 2.15, parte **c)**, para $n < p < \infty$, ou pelo Teorema 2.17, para $p = \infty$, resulta

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda_0}(\overline{\Omega}).$$

Seja B um conjunto limitado de $W^{1,p}(\Omega)$ então, pela imersão acima vem que B é limitado em $C^0(\overline{\Omega})$ e

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,\|x - y\|^{\lambda_0}\,, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}, \quad \forall u \in B.$$

Esta desigualdade implica que B é equicontínuo em $\overline{\Omega}$. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli, segue o caso **c)** do teorema. ■

Corolário 2.9. *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^{m+1}, $m \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$ *se* $p < n$.

b) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$ *se* $p = n$.

c) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ *se* $n < p \leq \infty$.

Demonstração: Seja (u_μ) uma sucessão limitada de funções de $W^{m+1,p}(\Omega)$. Então

$$(D^\alpha u_\mu) \quad \text{é limitada em } W^{1,p}(\Omega),\ \forall\, |\alpha| \leq m.$$

Aplicando o Teorema de Rellich-Kondrachov, vem que existe uma subsucessão de (u_μ), denotada também por (u_μ), e $u \in W^{m,q}(\Omega)$, para os casos a) e b), tal que

$$D^\alpha u_\mu \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \qquad \forall\ |\alpha| \leq m$$

que mostra **a)** e **b)**. Para o caso **c)**, existe $u \in W^{m+1,p}(\Omega)$ tal que $u_\mu \rightharpoonup u$ em $W^{m+1,p}(\Omega)$, portanto $u \in C^m(\overline{\Omega})$ pois $m < m + 1 - \dfrac{n}{p} \leq m + 1$. Aplicando o Teorema de Rellich-Kondrachov, obtém-se:

$$D^\alpha u_\mu \to D^\alpha u \quad \text{em} \quad C^0(\overline{\Omega}), \qquad \forall\ |\alpha| \leq m$$

que mostra a parte **c)** do corolário. ■

Corolário 2.10. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $m \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

a) Se Ω é de classe C^{m+1} a seguinte imersão é compacta:

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega).$$

b) Se Ω é qualquer, a seguinte imersão é compacta:

$$W_0^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m,p}(\Omega).$$

Demonstração: A parte **a)** é obtida aplicando o Corolário 2.9 para as diferentes possibilidades de p e n. Note que se $p < n$ então $p < np/(n-p)$. Também $C^m(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$. Para a parte **b)**, considere $\mathcal{O}$ uma bola aberta do $\mathbb{R}^n$ que contenha propriamente Ω. Considere as aplicações

$$W_0^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{ext}} W^{m+1,p}(\mathcal{O}) \xrightarrow{I} W^{m,p}(\mathcal{O}) \xrightarrow{r_\Omega} W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde ext $u = \tilde{u}$, $\tilde{u}$ a extensão de u a $\mathcal{O}$ por zero fora de Ω e $r_\Omega\, u = u|_\Omega$. Notando que a primeira e terceira aplicações são contínuas e a aplicação I é compacta, pela parte **a)**, segue a parte **b)** do corolário. ■

Teorema 2.20. *Sejam Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m, e $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n-mp}$ se $mp < n$.

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$ se $mp = n$.

c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \quad k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1$ se $mp > n$ onde k é um inteiro não negativo.

Demonstração: As partes **a)** e **b)** serão mostradas aplicando indução com relação a m.

Mostrar-se-á **a)**. Para $m = 1$, o resultado é verdadeiro pelo Teorema de Rellich-Kondrachov. Suponha **a)** válido para $m \geq 1$. Será provado que **a)** é válido para $m+1$, isto é, para $(m+1)p < n$ será provado que a imersão

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad 1 \leq q < \frac{np}{n-(m+1)p} = q^*$$

é compacta. Com efeito

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} \quad \text{com} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \cdot$$

Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, aplicado a $\dfrac{1}{q^*} = \dfrac{1}{p^*} - \dfrac{1}{n}$, obtém-se que a imersão

$$W^{1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad 1 \leq q < q^* \tag{2.62}$$

é compacta e, pelo Teorema 2.57, aplicado a $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

que acarreta

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p^*}(\Omega). \tag{2.63}$$

As imersões (2.62) e (2.63) implicam a parte a) para $m+1$.

Mostrar-se-á **b)**. Para $m = 1$, o resultado é válido pelo Teorema de Rellich-Kondrachov. Suponha **b)** válido para $m \geq 1$. Será provado que b) é válido para $m+1$, isto é, para $(m+1)p = n$ demonstrar-se-á que a imersão

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$$

é compacta. De fato, tem-se $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$ que implica, pelo Teorema 2.15,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega),$$

portanto:

$$W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,n}(\Omega).$$

O Teorema de Rellich-Kondrachov garante a imersão

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty$$

é compacta. As duas últimas imersões implicam **b)** para $m+1$.

Demonstrar-se-á **c)**. Pelos Teoremas 2.15 e 2.17 vem que

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda_1}(\overline{\Omega})$$

para algum $0 < \lambda_1 \leq 1$. Notando que $C^{k,\lambda_1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ resulta

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda_1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}).$$

Seja B um conjunto limitado de $W^{m,p}(\Omega)$ então B é um conjunto limitado em $C^k(\overline{\Omega})$ e

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C \left\| x - y \right\|^{\lambda_1}, \quad \forall\, x, y \in \overline{\Omega},\ |\alpha| \leq k \text{ e } u \in B.$$

Pelo Teorema de Arzela-Ascoli segue então que B é relativamente compacto em $C^k(\overline{\Omega})$. Assim o teorema está demonstrado. ■

Quando Ω não é limitado pode acontecer que a imersão de $W_0^{m,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ seja compacta, como é o caso quando Ω satisfaz a hipótese geométrica

$$\lim_{\substack{x \in \Omega \\ ||x|| \to \infty}} \operatorname{dist}(x, \Gamma) = 0, \quad \Gamma \text{ é a fronteira de } \Omega$$

(isto é, Ω é quase-limitado). Ver este resultado em R.A. Adams [1], pag. 150. Quando Ω é apenas não limitado pode acontecer que a imersão de $W_0^{m,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ não seja compacta como é mostrado no seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. Seja $1 \leq p < \infty$ então a imersão de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ em $L^p(\mathbb{R})$ não é compacta. Para mostrar este resultado primeiro prova-se que se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ então

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0.$$

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $||u - \varphi||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} < \varepsilon$. Pelo Teorema 2.6 vem

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x) - \varphi(x)| \leq C||u - \varphi||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon,$$

Disto vem

$$|u(x)| \leq |u(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x)| \leq C\varepsilon, \quad \forall\, |x| \geq M$$

onde supp $\varphi \subset [-M, M]$, que mostra o resultado desejado. A seguir contrói-se uma seqüência (u_μ) de funções de $W^{1,p}(\mathbb{R})$, com (u_μ) limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ e (u_μ) não contém nenhuma subsucessão convergente em $L^p(\mathbb{R})$. Com efeito, considera-se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, $u \neq 0$. Seja

$$u_\mu(x) = u(x+\mu), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então

$$||u_\mu||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = ||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R})}\,, \quad \forall\, \mu.$$

Se existisse alguma subsucessão (u_σ) de (u_μ) e $v \in L^p(\mathbb{R})$ tal que

$$u_\sigma \to v \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R})$$

teria-se que

$$u_\sigma(x) \to v(x) \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R},$$

que implicaria

$$u(x+\sigma) \to v(x), \ \ \text{para quase todo } x \in \mathbb{R}, \text{ quando } \sigma \to \infty.$$

Logo pelo resultado mostrado na primeira parte, acarretaria $v = 0$. Portanto

$$||u_\sigma||_{L^p(\mathbb{R})} \to 0.$$

Mas isto é um absurdo pois $||u_\sigma||_{L^p(\mathbb{R})} = ||u||_{L^p(\mathbb{R})} > 0$, $\forall\, \sigma$. Assim a afirmação do exemplo está mostrada. ■

Uma condição necessária e suficiente sobre Ω não limitado para que a imersão de $W_0^{m,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ seja compacta pode ser encontrada em R.A. Adams [1], pag. 152.

Observação 2.18. Uma parte dos resultados do Capítulo 2 foram obtidos para funções a valores reais. Entretanto, todos os resultados do capítulo são válidos para funções a valores complexos. Isto deve-se ao fato de que sendo $u(x) = Re\, u(x) + i\ Im\, u(x)$ então as funções $Re\, u(x)$ e $Im\, u(x)$ têm a mesma regularidade que u e o suporte de cada uma delas está contido no suporte de u. Também, por exemplo,

$$\left(\int |u\,(x)\,|^q\, dx \right)^{1/q} \leq 2\left(\int |Re\, u\,(x)\,|^q\, dx \right)^{1/q} + 2\left(\int |Im\, u\,(x)\,|^q\, dx \right)^{1/q}$$

e

$$\|Re\, u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}\,, \qquad \|Im\, u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}\,.$$

Resultados análogos para $q = p = \infty$. Então a observação decorre aplicando os resultados obtidos para funções reais e as propriedades mencionadas.

2.5 Espaços $H^s(\Omega)$

Inicia-se o estudo com outra caracterização dos espaços $H^m(\mathbb{R}^n)$, m inteiro positivo, que servirá de motivação para a definição dos espaços $H^s(\Omega)$, quando s é um real positivo e Ω um aberto não necesssariamente limitado do $\mathbb{R}^n$. Considera-se a função $J_m(x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{m/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Note que $J_m(x)$ é uma função lentamente crescente no infinito. Nesta seção $\hat{u}$ estará representando a transformada de Fourier de u e $\check{u}$ a transformada de Fourier inversa.

Proposição 2.14. *$H^m(\mathbb{R}^n)$ coincide com $\{u \in S'(\mathbb{R}^n); \left(1+\|x\|^2\right)^{m/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Definindo*

$$|||u|||_m = \left\| \left(1+\|x\|^2\right)^{m/2} \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

a aplicação $u \mapsto |||u|||_m$ de $H^m(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ é uma norma equivalente a norma de Sobolev $\|u\|_m$.

Demonstração: Sejam C_1, C_2 constantes positivas verificando a desigualdade:

$$C_1 \sum_{|\alpha|\le m} x^{2\alpha} \le \left(1+\|x\|^2\right)^m \le C_2 \sum_{|\alpha|\le m} x^{2\alpha}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

(ver Exercício 5 do Capítulo 1). Observe que $H^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (ver Seção 1.2.3 do Capítulo 1). Se $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, para todo $|\alpha| \le m$, resulta

$$\widehat{D^\alpha u}(x) = (ix)^\alpha\, \hat{u}(x) \quad \text{quase sempre no} \quad \mathbb{R}^n.$$

Daí e da última desigualdade elementar acima mencionada conclui-se que $J_m\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} |||u|||_m^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^m |\hat{u}(x)|^2\, dx \le \\ &\le C_2 \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha\, \hat{u}(x)|^2\, dx = C_2 \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{D^\alpha u}(x)\right|^2 dx = \\ &= C_2 \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2\, dx = C_2\, \|u\|_m^2 . \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $J_m\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, da desigualdade elementar acima resulta, que para todo $|\alpha| \le m$, $(ix)^\alpha\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\widehat{D^\alpha u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo

$D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, além disso,

$$\begin{aligned}\|u\|_m^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{D^\alpha u}(x)\right|^2 \, dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} \left|\hat{u}(x)\right|^2 \, dx \leq \frac{1}{C_1} |||u|||_m^2\end{aligned}$$

que demonstra a proposição. ■

A seguir, serão estudados os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ sendo s um número real não negativo. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e s real não negativo, seja $J_s(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{s/2}$, semelhante a J_m caso m inteiro não negativo. Define-se $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço vetorial

$$\left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \left(1 + \|x\|^2\right)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

com o produto escalar definido por:

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^s \hat{u}(x)\overline{\hat{v}(x)} \, dx,$$

cuja norma por ele induzida é:

$$||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^s |\hat{u}(x)|^2 \, dx.$$

Simples é mostrar que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.15. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $H^s(\mathbb{R}^n)$, sendo aí denso.*

Demonstração: Seja (u_μ) uma sucessão de Cauchy de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Então (u_μ) e $(J_s\hat{u}_\mu)$ são sucessões de Cauchy de $L^2(\mathbb{R}^n)$, logo existem u e v em $L^2(\mathbb{R}^n)$ tais que $u_\mu \to u$ e $J_s\hat{u}_\mu \to v$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para provar que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é Hilbert, basta mostrar que $v = J_s\hat{u}$. Para toda função teste φ no $\mathbb{R}^n$, tem-se:

$$\langle J_s\hat{u}, \varphi\rangle = \langle \hat{u}, J_s\varphi\rangle = \lim_{\mu\to\infty} \langle \hat{u}_\mu, J_s\varphi\rangle = \lim_{\mu\to\infty} \langle J_s\hat{u}_\mu, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle$$

e do lema de Du Bois-Reymond (Proposição 1.4 do Capítulo 1), obtém-se $J_s\hat{u} = v$.

Dada uma função $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, seja (φ_μ) uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$ convergente para $J_s\hat{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para todo $\mu \in \mathbb{N}$, a função $\varphi_\mu(x)/\left(1 + \|x\|^2\right)^{s/2}$

pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo existe $\psi_\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\psi}_\mu(x) = \varphi_\mu(x)/\big(1+\|x\|^2\big)^{s/2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Daí

$$\begin{aligned}\|\psi_\mu - u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+\|x\|^2\big)^s \left|\widehat{\psi}_\mu(x) - \hat{u}(x)\right|^2 dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\mu(x) - J_s(x)\hat{u}(x)|^2 \, dx,\end{aligned}$$

isto é, (ψ_μ) é uma sucessão de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergente para u em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Resta demonstrar a continuidade da inclusão de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Seja m um inteiro positivo tal que

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+\|x\|^2\big)^{-(m-s)} dx < +\infty.$$

Para todo u em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tem-se:

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+\|x\|^2\big)^m \big(1+\|x\|^2\big)^{-(m-s)} \, |\hat{u}(x)|^2 \, dx \le C\, p_m(\hat{u})$$

sendo p_m as seminormas que definem a topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se (u_μ) converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, da continuidade da transformação de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ decorre que $(\hat{u}_\mu)$ converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, daí e da última desigualdade decorre que (u_μ) converge para zero em $H^s(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolário 2.11. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Seja $s \ge 0$ e $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$ o dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Da proposição anterior resulta que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n).$$

Representa-se por $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}$ a norma de uma forma linear contínua $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \sup\big\{|\langle f,u\rangle|; u \in H^s(\mathbb{R}^n), \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 1\big\}.$$

Proposição 2.16. *São verdadeiras as seguintes assertivas:*

a) $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \big\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \big(1+\|x\|^2\big)^{-s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\big\}$,

b) $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \left\|\big(1+\|x\|^2\big)^{-s/2} \hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

para toda f *em* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Dada $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, do teorema da representação de Riesz decorre a existência de $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

e

$$\langle f, u\rangle = (u, u_0)_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad \text{para todo } u \text{ em } H^s(\mathbb{R}^n).$$

Para todo φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tem-se $\hat{\hat{\varphi}}(x) = \varphi(-x)$, logo

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\varphi}\rangle &= (\hat{\varphi}, u_0)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^s \varphi(-x)\overline{\hat{u}_0(x)}\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^s \overline{\hat{u}_0(-x)}\, \varphi(x)\, dx, \end{aligned}$$

logo, $\hat{f}$ é definida pela função $\left(1+\|x\|^2\right)^s \overline{\hat{u}_0(-x)}$, donde $J_{-s}\hat{f}(x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{s/2} \overline{\hat{u}_0(-x)}$ ou seja, $J_{-s}\,\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\left\|J_{-s}\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|J_s\hat{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}\ .$$

Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $J_{-s}\hat{f}$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dada uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ seja $\varphi^*(x) = \hat{\varphi}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Notando que $\hat{\hat{\varphi}}(-x) = \varphi(x)$, vem que $\hat{\varphi}^* = \varphi$. Escrevendo $\psi = J_s\varphi^*$ pertencente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|J_s\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|J_s\varphi^*\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

e também, $\varphi = \hat{\varphi}^* = \widehat{J_{-s}\psi}$, logo:

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \widehat{J_{-s}\psi}\rangle = \langle J_{-s}\hat{f}, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^{-\frac{s}{2}} \hat{f}(x)\psi(x)\, dx,$$

portanto,

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \left\|J_{-s}\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|J_{-s}\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\ ,$$

desigualdade esta que demonstra ser $f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ contínua na topologia de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Logo f estende-se a um único funcional linear contínuo ao $H^s(\mathbb{R}^n)$, isto é, $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. ■

A seguir mostra-se que para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a aplicação linear

$$u \longmapsto \varphi u \quad \text{de} \quad H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

é contínua. Para isto observa-se que

Lema 2.10. *Para* φ *e* u *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, tem-se*

$$(2\pi)^{n/2}\,\widehat{\varphi u} = \hat{\varphi} * \hat{u}.$$

Demonstração: De fato, nota-se que

$$\widehat{(\varphi u)}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}\,\varphi(y)u(y)\,dy$$

e $\varphi(y) = \check{\hat{\varphi}}(y)$, isto é,

$$\varphi(y) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y,z)-i(z,w)}\,\varphi(w)\,dwdz.$$

Segue então

$$\begin{aligned}
\widehat{(\varphi u)}(x) &= (2\pi)^{-3n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-z,y)}\,e^{-i(z,w)}\,u(y)\varphi(w)\,dydwdz = \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z,w)}\,\varphi(w)\hat{u}(x-z)\,dwdz = \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(x-z)\hat{\varphi}(z)\,dz = (2\pi)^{-n/2}(\hat{u}*\hat{\varphi})(x)
\end{aligned}$$

que mostra o lema. ■

Proposição 2.17. *Sejam* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *e* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *com* s *real* ≥ 0*, então*

a) $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

b) *A aplicação linear*

$$u \mapsto \varphi u \quad \textit{de} \quad H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

é contínua e verifica:

$$\|\varphi u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|\varphi\|_{H^r(\mathbb{R}^n)}\,\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

onde $2(r-s) > n$, $C^2 = (2\pi)^{-n}\,C_0\,2^{2s+1}$ *e*

$$C_0 = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+\|y\|^2)^{r-s}}\,dy.$$

Demonstração: De início considera-se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então pelo Lema 2.10 segue-se:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+\|x\|^2\big)^s\, |\widehat{\varphi u}(x)|^2\, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+\|x\|^2\big)^s\, |(\hat{\varphi} * \hat{u})(x)|^2\, dx,$$

Por outro lado,

$$\Big|\big(1+\|x\|^2\big)^{s/2} (\hat{\varphi} * \hat{u})(x)\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\big(1+\|x\|^2\big)^{s/2}}{\big(1+\|y\|^2\big)^{r/2}}\, |\hat{u}\,(x-y)\,| \big(1+\|y\|^2\big)^{r/2}\, |\hat{\varphi}(y)|\, dy,$$

que implica, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\Big|\big(1+\|x\|^2\big)^{s/2} (\hat{\varphi} * \hat{u})(x)\Big|^2 \leq \|\varphi\|^2_{H^r(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\big(1+\|x\|^2\big)^{s}}{\big(1+\|y\|^2\big)^{r}}\, |\hat{u}\,(x-y)|^2\, dy.$$

Assim

$$\|\varphi u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n}\, \|\varphi\|^2_{H^r(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\big(1+\|x\|^2\big)^{s}}{\big(1+\|y\|^2\big)^{r}}\, |\hat{u}\,(x-y)|^2\, dydx. \tag{2.64}$$

Observe que $1+\|x\|^2 < 2\big(1+\|x-y\|^2\big) + 2\big(1+\|y\|^2\big)$, portanto

$$\big(1+\|x\|^2\big)^s \leq 2^{2s}\big(1+\|x-y\|^2\big)^s + 2^{2s}\big(1+\|y\|^2\big)^s,$$

donde pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\big(1+\|x\|^2\big)^{s}}{\big(1+\|y\|^2\big)^{r}}\, |\hat{u}(x-y)|^2\, dxdy \leq \\
&\quad \leq 2^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\big(1+\|y\|^2\big)^{r}} \left[\int \big(1+\|x-y\|^2\big)^s\, |\hat{u}\,(x-y)|^2\, dx\right] dy + \\
&\quad + 2^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\big(1+\|y\|^2\big)^{r-s}} \left[\int |\hat{u}\,(x-y)|^2\, dx\right] dy \leq \\
&\quad \leq 2^{2s} C_0 \Big[\, \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Big] \leq 2^{2s+1} C_0\, \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}\ .
\end{aligned}$$

De (2.64) e desta última desigualdade resulta

$$\|\varphi u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \|\varphi\|_{H^r(\mathbb{R}^n)}\, \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\ . \tag{2.65}$$

Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e (u_μ) uma sucessão de funções $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_\mu \to u$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$ (ver Corolário 2.11). Segue então que

$$\varphi\, u_\mu \to \varphi\, u \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por (2.65) vem que $(\varphi\, u_\mu)$ é uma sucessão de Cauchy em $H^s(\mathbb{R}^n)$, logo, existe $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi\, u_\mu \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, portanto $\varphi\, u_\mu \to v$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Da unicidade dos limites vem que $v = \varphi\, u$ e

$$\varphi\, u_\mu \to \varphi\, u \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}^n).$$

Isto mostra a parte a). A parte b) segue de (2.65) e desta última convergência. ■

A seguir dar-se-á uma demonstração simples da parte b) do Corolário 2.7 para o caso particular $p = 2$ porém j não necessariamente um inteiro.

Proposição 2.18. *Seja* $s \geq 0$, *s número real. Então*

$$||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||^{3/4}_{H^{4s/3}(\mathbb{R}^n)}\, ||u||^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall\, u \in H^{4s/3}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Considere $s > 0$ pois se $s = 0$ não se tem nada a demonstrar. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tem-se:

$$||\varphi||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s\, |\hat{\varphi}(x)|^2\, dx.$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $0 \leq \sigma \leq s$. Então

$$\begin{aligned}(1 + ||x||^2)^s = (2\varepsilon)^{1/2}\, (1 + ||x||^2)^{s-\sigma}\, (2\varepsilon)^{-1/2}\, (1 + ||x||^2)^{\sigma} \leq \\ \leq \varepsilon(1 + ||x||^2)^{2(s-\sigma)} + \frac{1}{4\varepsilon}\, (1 + ||x||^2)^{2\sigma}.\end{aligned}$$

As duas últimas expressões implicam

$$||\varphi||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon ||\varphi||^2_{H^{2(s-\sigma)}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{4\varepsilon}\, ||\varphi||^2_{H^{2\sigma}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Escolhendo $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\, ||\varphi||_{H^{2\sigma}(\mathbb{R}^n)} \big/ ||\varphi||_{H^{2(s-\sigma)}(\mathbb{R}^n)}$ nesta desigualdade, obtém-se

$$||\varphi||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||\varphi||_{H^{2(s-\sigma)}(\mathbb{R}^n)}\, ||\varphi||_{H^{2\sigma}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Com análogos argumentos e notando que

$$(1 + ||x||^2)^{2\sigma} = (2\varepsilon)^{1/2}\, (1 + ||x||^2)^{2\sigma}\, (2\varepsilon)^{-1/2}$$

deduz-se que

$$||\varphi||^2_{H^{2\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq ||\varphi||_{H^{4\sigma}(\mathbb{R}^n)}\, ||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Combinando as duas últimas desigualdades, resulta

$$||\varphi||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||\varphi||_{H^{2(s-\sigma)}(\mathbb{R}^n)} \, ||\varphi||^{1/2}_{H^{4\sigma}(\mathbb{R}^n)} \, ||\varphi|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, .$$

Escolhendo $\sigma = s/3$ nesta desigualdade, obtém-se a desigualdade desejada para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A proposição segue pela densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $H^{4s/3}(\mathbb{R}^n)$. ■

A Proposição 2.18 foi obtida aplicando o mesmo método da demonstração que L.A. Medeiros [21] utilizou para demonstrar o caso particular $s = 3$.

A seguir serão introduzidos os espaços $H^s(\Omega)$. Denota-se por $H^s(\Omega)$, s um número real não negativo e Ω um aberto não necessariamente limitado do $\mathbb{R}^n$, ao espaço vetorial

$$H^s(\Omega) = \{u = v|_\Omega \, ; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}. \tag{2.66}$$

Dota-se a $H^s(\Omega)$ de uma topologia. De fato, considera-se a aplicação linear sobrejetora

$$H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\Omega), \quad v \mapsto rv = v|_\Omega \, .$$

Observe que o núcleo $N(r)$ de r é fechado. Com efeito, seja (v_μ) uma sucessão de elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $rv_\mu = 0$ e $v_\mu \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Tem-se

$$\begin{aligned} &||v_\mu - v||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + \|x\|^2\big)^s \, |\hat{v}_\mu(x) - \hat{v}(x)|^2 \, dx \, \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{(v_\mu - v)}(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v_\mu(x) - v(x)|^2 \, dx \geq \int_\Omega |v\,(x)\,|^2 \, dx \end{aligned}$$

logo

$$\int_\Omega |v\,(x)\,|^2 \, dx \leq \lim \|v_\mu - v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = 0$$

isto é, $v|_\Omega = 0$ o que mostra que $N(r)$ é fechado.
Considera-se

$$\begin{array}{c} H^s(\mathbb{R}^n) \;\xrightarrow{\;r\;}\; H^s(\Omega) \\ \pi \downarrow \quad \nearrow \; \sigma \\ H^s(\mathbb{R}^n)/N(r) \end{array} \tag{2.67}$$

onde π é o homomorfismo canônico. Tem-se que σ é um isomorfismo de espaço vetorial e $X = H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar

$$\big([v], [w]\big)_X = \big([v], [w]\big)_1 + i\big([v], i[w]\big)_1 \, ,$$

onde

$$\big([v], [w]\big)_1 = 4^{-1}\big(\, \|[v + w]\|^2_X - \|[v - w]\|^2_X \, \big),$$

e norma

$$\|[v]\|_X = \inf\big\{\, \|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \,; w \in [v]\big\}. \tag{2.68}$$

Equipa-se $H^s(\Omega)$ com a topologia dada por $H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$, via o isomorfismo σ. Assim

$$(u_1, u_2)_{H^s(\Omega)} = \big([v_1],[v_2]\big)_X \quad \text{onde} \quad v_1\big|_\Omega = u_1 \text{ e } v_2\big|_\Omega = u_2, \tag{2.69}$$

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \|[v]\|_X = \inf\big\{\, \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \,; v|_\Omega = u\big\}. \tag{2.70}$$

Com esse produto escalar, $H^s(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert. Na verdade, $H^s(\Omega)$ equipado com esse produto escalar é isométrico ao subespaço fechado $N(r)^\perp$ (ortogonal de $N(r)$) de $H^s(\mathbb{R}^n)$, como será mostrado a seguir.

Seja $u \in H^s(\Omega)$. Denota-se por $[\tilde{u}]$ a classe de equivalência determinada por u, isto é,

$$[\tilde{u}] = \{v \in H^s(\mathbb{R}^n); v|_\Omega = u\}.$$

Claramente, $[\tilde{u}]$ é um subconjunto convexo fechado de $H^s(\mathbb{R}^n)$ pois $N(r)$ é fechado em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Representa-se por u^* a projeção ortogonal do vetor nulo sobre $[\tilde{u}]$, mais precisamente, $u^* \in N(r)^\perp$ e

$$||u^*||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \text{ mín}\,\{||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,; v \in [\tilde{u}]\}.$$

Tem-se assim a aplicação

$$H^s(\Omega) \xrightarrow{T} N(r)^\perp,\ u \xmapsto{T} u^*.$$

Proposição 2.19. *A aplicação T é uma isometria linear de $H^s(\Omega)$ sobre $N(r)^\perp$.*

Demonstração: Do isomorfismo do espaço vetorial

$$H^s(\mathbb{R}^n)\big/N(r) \xrightarrow{\sigma} H^s(\Omega),\ \ \sigma([v]) = u,\ \ u = v|_\Omega$$

σ definido em (2.67) vem que

$$H^s(\Omega) \xrightarrow{\sigma^{-1}} H^s(\mathbb{R}^n)\big/N(r),\ \sigma^{-1}(u) = [\tilde{u}]$$

é uma aplicação linear. Seja $v^* \in N(r)^\perp$ a projeção ortogonal do vetor nulo sobre $[v]$. Define-se a aplicação

$$H^s(\mathbb{R}^n)\big/N(r) \xrightarrow{P} N(r)^\perp,\ \ P[v] = v^*.$$

Tem-se que P é linear. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
&P([v_1]+[v_2]) = P([v_1+v_2]) = v^*,\ v_1+v_2 = w+v^*,\ w \in N(r),\ v^* \in N(r)^\perp \\
&P([v_1]) = v_1^*\,,\ v_1 = w_1 + v_1^*\,,\ w_1 \in N(r),\ v_1^* \in N(r)^\perp \\
&P([v_2]) = v_2^*\,,\ v_2 = w_2 + v_2^*\,,\ w_2 \in N(r),\ v_2^* \in N(r)^\perp .
\end{aligned}
$$

Como a representação de v_1+v_2 como uma soma de um vetor de $N(r)$ e de um vetor de $N(r)^\perp$ é única vem que $v^* = v_1^* + v_2^*$, isto é, $P([v_1]+[v_2]) = P([v_1]) + P([v_2])$. Analogamente $P(\alpha[v]) = \alpha\, P([v])$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Observe que

$$Tu = P(\sigma^{-1}(u))$$

logo T é linear. Por outro lado,

$$(u_1,u_2)_{H^s(\Omega)} = ([v_1],[v_2])_X = ([u_1^*],[u_2^*])_X = ([u_1^*],[u_2^*])_1 + i([u_1^*], i[u_2^*])_1\,.$$

Tem-se

$$
\begin{aligned}
([u_1^*],[u_2^*])_1 &= \ \mathrm{Re}\ (u_1^*,u_2^*)_{H^s(\mathbb{R}^n)} \\
i([u_1^*], i[u_2^*])_1 &= i\ \ \mathrm{Im}\ (u_1^*,u_2^*)_{H^s(\mathbb{R}^n)}\,.
\end{aligned}
$$

Combinando as três últimas expressões resulta

$$(u_1,u_2)_{H^s(\Omega)} = (u_1^*,u_2^*)_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

que mostra a proposição. ■

Como conseqüência da proposição acima vem que $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Observação 2.19. Com o intuito de tornar autosuficiente a leitura destas notas, mostra-se que a norma (2.68) do espaço $X = H^s(\mathbb{R}^n)/N(r)$ satisfaz a lei do paralelogramo.

Com efeito, sejam $v_1 \in [v]$ e $w_1 \in [w]$ então $v_1 \pm w_1 \in [v \pm w]$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
\|[v]+[w]\|_X^2 + \|[v]-[w]\|_X^2 &\leq \|v_1+w_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 + \|v_1-w_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \\
&= 2\,\|v_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\,\|w_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2
\end{aligned}
$$

que implica, tomando o ínfimo de cada um dos termos da última expressão,

$$\|[v]+[w]\|_X^2 + \|[v]-[w]\|_X^2 \leq 2\,\|[v]\|_X^2 + 2\,\|[w]\|_X^2\ .$$

A desigualdade

$$2\,\|[v]\|_X^2 + 2\,\|[w]\|_X^2 \leq \|[v]+[w]\|_X^2 + \|[v]-[w]\|_X^2$$

é mostrada de forma análoga.

Proposição 2.20. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, s real ≥ 0.*

Demonstração: Por construção a aplicação r definida em (2.67) é contínua. Seja $u \in H^s(\Omega)$ então existe $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $rv = v|_\Omega = u$. Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ (Corolário 2.11) vem que existe (φ_μ) sucessão de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_\mu \to v$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, e pela continuidade de r, resulta $r\varphi_\mu \to rv$ em $H^s(\Omega)$, que mostra a proposição. ■

No caso de ser s um inteiro não negativo m e Ω um aberto limitado, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 2.21. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^m. Então*

$$H^m(\Omega) = \left\{u = v|_\Omega \,; v \in H^m(\mathbb{R}^n)\right\}$$

e as normas $\|u\|_{H^m(\Omega)}$ e $|||u|||_{H^m(\Omega)}$ são equivalentes, onde $|||u|||_{H^m(\Omega)}$ é a norma definida em (2.70) para $s = m$.

Demonstração: Seja $P\colon H^m(\Omega) \longrightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$ o operador de prolongamento dado pelo Teorema 2.14. Considere $u \in H^m(\Omega)$. Seja $v = Pu$ então $rv = rPu = u$ onde $rv = v|_\Omega$. Isto mostra uma das inclusões dos conjuntos. Por outro lado, note que $rD^\alpha v = D^\alpha rv$, $|\alpha| \leq m$, que mostra a outra inclusão.

Tem-se:

$$|||u|||_{H^m(\Omega)} \leq \|Pu\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{H^m(\Omega)}\ . \tag{2.71}$$

Por outro lado, seja $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $rv = u$. Então

$$\|D^\alpha(rv)\|_{L^2(\Omega)} = \|r(D^\alpha v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|D^\alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ , \quad |\alpha| \leq m$$

logo

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq \|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\ .$$

Como v foi arbitrário segue-se que

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq |||u|||_{H^m(\Omega)}\,. \tag{2.72}$$

De (2.71) e (2.72) obtém-se que as normas são equivalentes. ■

Conclui-se da Proposição 2.21 que quando Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com Ω de classe C^m, a definição de espaço $H^m(\Omega)$ dada no Parágrafo 2.2 coincide com a definição dada por (2.66), (2.69), (2.70). Em geral, quando Ω não é regular, tem-se que o espaço definido por (2.66), (2.69), (2.70) está contido no espaço definido no Parágrafo 2.2. Para um estudo deste caso o leitor pode consultar N. Meyers - J. Serrin [24].

Serão demonstradas algumas propriedades dos espaços $H^s(\Omega)$.

Proposição 2.22. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então*

$$H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Do fato $H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ segue que $H^{s_2}(\Omega) \subset H^{s_1}(\Omega)$. Também para $u \in H^{s_2}(\Omega)$,

$$\left\{v \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n);\ v|_\Omega = u\right\} \subset \left\{w \in H^{s_1}(\mathbb{R}^n);\ w|_\Omega = u\right\}.$$

Desta inclusão e notando que $\|z\|_{H^{s_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \|z\|_{H^{s_2}(\mathbb{R}^n)}$ para todo $z \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, vem que

$$\text{ínf}\left\{ \|w\|_{H^{s_1}(\mathbb{R}^n)}\ ; w|_\Omega = u\right\} \leq \ \text{ínf}\left\{ \|v\|_{H^{s_2}(\mathbb{R}^n)}\ ; v|_\Omega = u\right\}$$

isto é,

$$\|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^{s_2}(\Omega)}\ , \quad u \in H^{s_2}(\Omega)$$

que mostra a inclusão contínua de $H^{s_2}(\Omega)$ em $H^{s_1}(\Omega)$. ■

Denota-se por $C_b^m(\overline{\Omega})$ ao espaço de Banach

$$C_b^m(\overline{\Omega}) = \left\{u = v|_\Omega\, ; v \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ e } D^\alpha v \text{ é limitado em } \overline{\Omega},\ |\alpha| \leq m\right\}$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{C_b^m(\overline{\Omega})} = \ \max_{|\alpha|\leq m}\left(\sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|\right).$$

Claramente se Ω é limitado, $C_b^m(\overline{\Omega}) = C^m(\overline{\Omega})$.

Proposição 2.23. *Se $s - \dfrac{n}{2} > m$, m inteiro não negativo, então*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C_b^m(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Faz-se a demonstração por indução com relação m. Mostra-se o resultado para $m = 0$.

Sejam $u \in H^s(\Omega)$ e $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $v|_\Omega = u$. Tem-se que

$$\hat{v}(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{-s/2}\left(1 + \|x\|^2\right)^{s/2}\hat{v}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\|\hat{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C^{1/2}\, \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

com $C = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^{-s} dx < \infty$. Dados x, x_μ no $\mathbb{R}^n$, tem-se $v(x) = \check{\hat{v}}(x)$, logo

$$v(x_\mu) - v(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{i(x_\mu,z)} - e^{i(x,z)}\right] \hat{v}(z)\, dz.$$

Se $x_\mu \to x$ em $\mathbb{R}^n$, decorre desta última igualdade e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado às funções $w_\mu(z) = e^{i(x_\mu,z)}\,\hat{v}(z)$, que $v(x_\mu) \to v(x)$, isto é, v é contínua em x. Como $x \in \mathbb{R}^n$ foi arbitrário segue-se que v é contínua em $\mathbb{R}^n$. Portanto u é contínua em $\overline{\Omega}$. Também

$$|v(x)| \leq (2\pi)^{-n/2}\, \|\hat{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2}\, C^{1/2}\, \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

que implica

$$\|u\|_{C_b^0(\overline{\Omega})} \leq (2\pi)^{-n/2}\, C^{1/2}\, \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\ , \quad \forall\, v \in H^s(\mathbb{R}^n),\ v|_\Omega = u$$

portanto

$$\|u\|_{C_b^0(\overline{\Omega})} \leq (2\pi)^{-n/2}\, C^{1/2}\, \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

que mostra a proposição para $m = 0$.

Suponha o resultado válido para $m \geq 0$. Mostra-se que ele também é válido para $m+1$, isto é, para $s - \frac{n}{2} > m+1$. De início observe que se $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então $\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \leq \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\ , \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.73}$$

Com efeito, $\widehat{\dfrac{\partial v}{\partial x_j}}(x) = i x_j\, \hat{v}(x)$ e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^{s-1} \left|\widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(x)\right|^2 dx \ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^{s-1} |x_j|^2\, |\hat{v}(x)|^2\, dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^{s} |\hat{v}(x)|^2\, dx\end{aligned}$$

que mostra a afirmação. Sejam $u \in H^s(\Omega)$ e $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $v|_\Omega = u$. Pela primeira parte vem que $v \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ e pela hipótese de indução pois $\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ e Ω pode ser o $\mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$ e

$$\left|D^\alpha \frac{\partial v}{\partial x_j}\,(x)\right| \leq C_1 \left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\alpha| \leq m$$

que implica por (2.73) e notando que $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ pois $\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$|D^a\, v(x)| \leq C_1 \, \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } |\alpha| \leq m+1.$$

Assim

$$\|u\|_{C_b^{m+1}(\overline{\Omega})} \leq C_1 \, \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \ , \quad \forall\, v \in H^s(\mathbb{R}^n),\ v|_\Omega = u$$

isto é

$$\|u\|_{C_b^{m+1}(\overline{\Omega})} \leq C_1 \, \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

e a proposição está demonstrada. ■

Observe que a Proposição 2.23 é uma generalização, num certo sentido, do Teorema 2.8 do Parágrafo 2.3, onde é estudado a imersão para o caso $m - \dfrac{n}{2} > k$.

Existem outros métodos para definir $H^s(\Omega)$, todos coincidentes quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$ ou um aberto limitado regular. Como exemplo de algum desses métodos pode-se mencionar os que usam a teoria de interpolação de espaços de Hilbert (ver J.L. Lions-E. Magenes [20]).

2.6 Teoremas de Traço

A seguir estuda-se uma versão elementar do teorema de traço. Considera-se um aberto limitado Ω bem regular do $\mathbb{R}^n$ (isto é, Ω de classe C^m para todo $m = 1, 2, \ldots$), com fronteira Γ. Considere $u \in H^1(\Omega)$. Se u é modificada numa curva $\mathcal{C}$ contida em Ω então u é essencialmente a mesma função pois $\mathcal{C}$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$, portanto a restrição de u a $\mathcal{C}$ não está bem definida. Análogo raciocínio para a restrição u à Γ. No entanto é possível dar um sentido à "restrição"$\gamma_0 u$ de u a Γ e caracterizar o espaço X onde está definida $\gamma_0 u$. A idéia é a seguinte: considera-se uma sucessão (u_μ) de funções regulares, $u_\mu \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, tal que (u_μ) converge para u em $H^1(\Omega)$. Então define-se $\gamma_0 u$ como o limite de $(\gamma_0 u_\mu)$, $\gamma_0 u_\mu = u_\mu\big|_\Gamma$, no espaço X. A função $\gamma_0 u$ é denominada traço de u em γ, ou simplesmente, traço de u. Da definição de $\gamma_0 u$ e a caracterização de X é que trata o teorema de traço para as funções $u \in H^1(\Omega)$.

Seja $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq 2$, e $\nu(x)$ a normal unitária exterior em $x \in \Gamma$. Generalizando o resultado anterior e seguindo a mesma ordem de idéias, estuda-se o traço $\gamma_j u$ em Γ das funções $\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ (ou equivalentemente, o traço em Γ de $D^\alpha u$, $|\alpha| = j$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$). Isto será analisado no teorema de traço para as funções $u \in H^m(\Omega)$. Análogas considerações para as funções $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$.

Seja $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. A fronteira $\Gamma = \{(x', 0), x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ de Ω é identificada a $\mathbb{R}^{n-1}$. Para obter os resultados anteriores primeiro estuda-se o traço em Γ das funções $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$. Depois por meio de cartas locais obtém-se os resultados de traço para as funções $u \in H^m(\Omega)$, Ω aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$.

De início estuda-se o traço de funções $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Fixa-se então $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ com fronteira Γ. Neste caso, define-se $H^s(\Gamma)$ como sendo $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$, $s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$.

Denota-se $u|_\Gamma$ por $\gamma_0 u$ para funções $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Tem-se o seguinte resultado:

Proposição 2.24. *É válida a desigualdade*

$$||\gamma_0 u||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq ||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}).$$

Suponha demonstrada a Proposição 2.24. Ela afirma que considerada $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ com a topologia induzida por $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, a aplicação

$$\gamma_0 \colon \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ denso em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, esta aplicação prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0, tal que

$$\gamma_0 \colon H^1(\mathbb{R}^n_+) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

a qual denomina-se *função traço*, e seu valor $\gamma_0 u$, para u em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, denomina-se o *traço* de u sobre $\mathbb{R}^{n-1}$. Análoga terminologia para funções u em $H^1(\Omega)$, Ω aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$.

Pode-se assim, enunciar o seguinte teorema, conhecido sob a denominação de *teorema de traço* para funções $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Teorema 2.21. *A função traço aplica $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ sobre $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ e o núcleo de γ_0 é o espaço $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$.*

Observação 2.20. Por construção vem que γ_0 é a única aplicação linear e contínua de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ em $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que

$$\gamma_0 u = u\Big|_{\mathbb{R}^{n-1}}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}).$$

Demonstra-se a Proposição 2.24 e a seguir o Teorema 2.21.

Demonstração da Proposição 2.24. Representa-se por $\mathcal{F}_1$ a transformada de Fourier no $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Dado um vetor $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, para todo $t \geq 0$, sejam $u(t)$ a função de $\mathbb{R}^{n-1}$ em $\mathbb{K}$ dada por

$$u(t)(x') = u(x', t) \quad \text{para} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

e $w(t)$ a função,

$$w(t) = \mathcal{F}_1[u(t)]$$
$$w(x',t) = w(t)\,(x') = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(x',y')}\, u(y',t)dy'.$$

Observe-se que $(\gamma_0 u)(x') = u(x',0) = u(0)(x')$, logo:

1.
$$\begin{aligned} ||\gamma_0 u||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &= ||u(0)||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \|x'\|^2\right)^{1/2} \left|\mathcal{F}_1\, u(0)\,(x')\right|^2\, dx' = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \|x'\|^2\right)^{1/2} \left|w\,(x',0)\right|\, dx'. \end{aligned}$$

Tem-se também:

2.
$$\begin{aligned} ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|u\,(x',t)\right|^2\, dx'dt = \\ &= \int_0^\infty ||u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt = \int_0^\infty ||\mathcal{F}_1[u(t)]||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt = \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|w\,(x',t)\right|^2\, dx'dt. \end{aligned}$$

Para $j = 1, 2, \ldots, n-1$, seja $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\cdot$ Então:

$$\mathcal{F}_1[D_j u(t)](x') = (-ix'_j)\mathcal{F}_1[u(t)](x') = (-ix'_j)w(x',t),$$

para $(x',t) \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Tem-se, também:

$$(D_j u(t))(x') = (D_j u)(x',t).$$

Do cálculo anterior obtém-se:

3.
$$\begin{aligned} ||D_j u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|(D_j u(t))\,(x')\right|^2\, dx' \right\} dt \\ &= \int_0^\infty ||D_j u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt = \int_0^\infty ||\mathcal{F}_1[D_j u(t)]||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt = \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|x'_j\right|^2 \left|w\,(x',t)\right|^2\, dx'dt. \end{aligned}$$

Fazendo $v(x',t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x',t)$ resulta que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x',t) = \mathcal{F}_1[v(t)](x'),$$

logo

4.
$$\begin{aligned} ||D_n u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_0^\infty ||v(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\,dt = \\ &= \int_0^\infty ||\mathcal{F}_1 v(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\,dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2 dx'dt. \end{aligned}$$

Das três últimas relações conclui-se:

5.
$$||u||^2_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ (1+\|x'\|^2)\,|w\,(x',t)|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2 \right\} dx'dt.$$

Fixando x' no $\mathbb{R}^{n-1}$, seja $\varphi(t) = w(x',t)$, $t \geq 0$, então $\varphi \in \mathcal{D}([0,\infty))$ e $\varphi'(t) = \dfrac{\partial w}{\partial t}(x',t)$. Da desigualdade de Schwarz obtém-se:

$$\begin{aligned} |\varphi(0)|^2 = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2\,dt = -2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \varphi(t)\varphi'(t)\,dt \leq \\ \leq 2\left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty |\varphi'\,(t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|w\,(x',0)|^2 \leq 2\left(\int_0^\infty |w\,(x',t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2 dt\right)^{1/2}.$$

6.
$$\begin{aligned} &\left(1+\|x'\|^2\right)^{1/2}\,|w\,(x',0)|^2 \leq \\ &\leq 2\left(\int_0^\infty (1+\|x'\|^2)\,|w\,(x',t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \int_0^\infty (1+\|x'\|^2)\,|w\,(x',t)|^2\,dt + \int_0^\infty \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x',t)\right|^2 dt. \end{aligned}$$

Integrando sobre o $\mathbb{R}^{n-1}$, aplicando o teorema de Fubini e levando em conta as relações 1., 5. e 6. obtém-se:

$$||\gamma_0 u||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq ||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

o que demonstra a Proposição 2.24. $\blacksquare$

Demonstração do Teorema 2.21.

a) γ_0 **é uma aplicação sobre** – De fato, seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ e considera-se

$$v(x', x_n) = (\mathcal{F}_1\varphi)(x') \exp\left(-\sqrt{1 + \|x'\|^2}\, x_n\right),$$

$$u(x', x_n) = \mathcal{F}_1^{-1}[v(x_n)]\,(x') = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x',y')}\, v(y', x_n) dy'.$$

Sendo $v(0)(x') = v(x', 0) = (\mathcal{F}_1\varphi)(x')$ tem-se

$$\gamma_0 u = \mathcal{F}_1^{-1}[v(0)] = \mathcal{F}_1^{-1}\, \mathcal{F}_1\, \varphi = \varphi.$$

Resulta daí que para demonstrar que γ_0 é uma aplicação sobre é suficiente demonstrar que $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e que $||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$.

Note-se que sendo

$$\int_0^\infty \exp\left(-2\sqrt{1 + \|x'\|^2}\, x_n\right) dx_n = \frac{1}{2\sqrt{1 + \|x'\|^2}},$$

obtém-se:

1.
$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + \|x'\|^2)|v(x', x_n)|^2\, dx' dx_n =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \|x'\|^2\right)^{1/2} \left|\mathcal{F}_1\varphi\,(x')\right|^2\, dx' = \frac{1}{2}\, ||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Também:

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) = -\sqrt{1 + \|x'\|^2}\, v(x', x_n)$$

e portanto:

2.
$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n)\right|^2 dx' dx_n = \int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + \|x'\|^2)|v(x', x_n)|^2 dx' dx_n =$$

$$= \frac{1}{2}\, ||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Fazendo:

$$w_j(x', x_n) = i\, x'_j\, v(x', x_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1;$$
$$w_n(x', x_n) = \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n),$$

tem-se:

$$D_j\, u(x', x_n) = \mathcal{F}_1^{-1}[w_j(x_n)](x'), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$D_n\, u(x', x_n) = \mathcal{F}_1^{-1}[w_n(x_n)](x').$$

Sendo $\mathcal{F}_1^{-1}$ uma isometria de $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ sobre $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tem-se:

3. $$\int_{\mathbb{R}^n_+} \big(|u(x', x_n)|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |D_j\, u(x', x_n)|^2\big) dx' dx_n =$$

$$= \int_0^\infty \left(||v(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} ||w_j(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \right) dx_n =$$

$$= \int_0^\infty \left(||v(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} ||\mathcal{F}_1^{-1}[w_j(x_n)]||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \right) dx_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} (1 + \|x'\|^2) |v(x', x_n)|^2\, dx' dx_n = \frac{1}{2}\, ||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Tem-se também:

4. $$\int_{\mathbb{R}^n_+} |D_n u(x', x_n)|^2\, dx' dx_n = \int_{\mathbb{R}^n_+} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx' dx_n =$$
$$= \frac{1}{2}\, ||\varphi||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Das relações 3. e 4. resulta que $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e $||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||\varphi||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$. Note que se a φ_1 e φ_2 correspondem, respectivamente, u_1 e u_2 então a $\varphi_1 - \varphi_2$ corresponde $u_1 - u_2$. Desta observação, da última relação e da densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ em $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ resulta que γ_0 é sobrejetora. Com efeito, seja $w \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ então existe uma sucessão (φ_μ) de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que

$$\varphi_\mu \to w \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Seja $u_\mu \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ a função obtida acima com φ_μ. Então $\gamma_0 u_\mu = \varphi_\mu$ e

$$||u_\mu - u_\tau||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||\varphi_\mu - \varphi_\tau||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

logo (u_μ) é uma sucessão de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Seja u o limite de (u_μ) em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ então pela continuidade de γ_0 resulta

$$\varphi_\mu = \gamma_0 u_\mu \to \gamma_0 u.$$

As duas últimas convergências implicam $\gamma_0 u = w$. Também $||u||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||w||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$. ■

Resta demonstrar que o núcleo de γ_0 é o espaço $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$. Para tal usa-se o seguinte resultado:

Lema 2.11. *Dados $u \in H^1(R^n_+)$ e $\varphi \in D(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, tem-se* $\gamma_0(\varphi\, u) = (\gamma_0\varphi)(\gamma_0 u)$.

Demonstração: Observa-se que as aplicações

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1\colon H^1(\mathbb{R}^n_+) & \to & H^1(\mathbb{R}^n_+) \\ u & \mapsto & \varphi u \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \sigma_2\colon H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) & \to & H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u & \mapsto & (\gamma_0\varphi)u \end{array}$$

são lineares e contínuas, (ver Proposição 2.17). Também, o lema é verdadeiro quando $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$.

Seja (φ_μ) uma sucessão de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, convergente para u em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Da continuidade das aplicações σ_1, σ_2 e γ_0, são verdadeiros os seguintes limites na topologia de $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$(\gamma_0\varphi)(\gamma_0 u) = \lim_{\mu\to\infty} (\gamma_0\varphi)(\gamma_0\varphi_\mu) = \lim_{\mu\to\infty} \gamma_0(\varphi\varphi_\mu) = \gamma_0(\varphi u). \quad ■$$

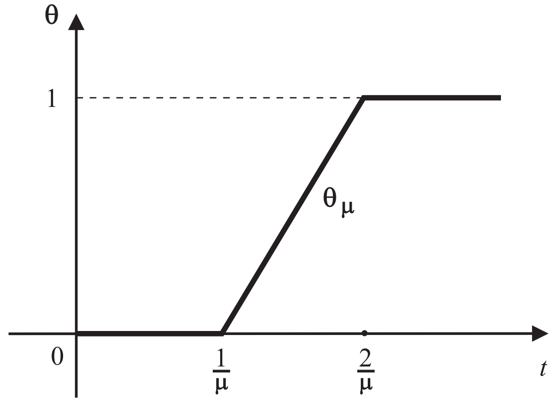
b) O espaço $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ é o núcleo de γ_0 – Com efeito, sendo $\gamma_0 u = 0$ para todo $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, tem-se $\gamma_0 u = 0$ para todo $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+) = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)}^{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$, o que demonstra estar $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ contido no núcleo de γ_0.

Considere $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ tal que $\gamma_0 u = 0$. Será provado que $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$.

Caso 1: $S(u) = \overline{\text{supp } u}^{\mathbb{R}^n}$ é um compacto do $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Para $\mu \in \mathbb{N}$ considere as funções:

$$\theta_\mu(t) = \left| \begin{array}{cl} 0 & \text{se} \quad 0 \le t < \dfrac{1}{\mu} \\ \mu t - 1 & \text{se} \quad \dfrac{1}{\mu} \le t \le \dfrac{2}{\mu} \\ 1 & \text{se} \quad t > \dfrac{2}{\mu} \end{array} \right.$$

cujos gráficos tem a forma:



e

$$u_\mu(x', x_n) = \theta_\mu(x_n) u(x', x_n), \quad (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$$

então $\operatorname{supp} u_\mu \subset S(u) \cap \{\mathbb{R}^{n-1} \times [1/\mu, \infty[\}$, sendo este último um compacto do $\mathbb{R}^n_+$, resulta que u_μ é um elemento de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ com suporte compacto contido no $\mathbb{R}^n_+$ logo $u_\mu \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ (ver Proposição 2.4). Demonstrando-se que (u_μ) converge para u na topologia de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ ficará provado que $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$. Realmente,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_+} |u_\mu(x) - u(x)|^2 \, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \left(\int_0^\infty |\theta_\mu(x_n) u(x', x_n) - u(x', x_n)|^2 \, dx_n \right) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{1/\mu} |u(x', x_n)|^2 \, dx_n dx' + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{1/\mu}^{2/\mu} (\mu x_n - 2)^2 |u(x', x_n)|^2 \, dx_n dx',
\end{aligned}$$

logo,

$$||u_\mu - u||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq \int_0^{2/\mu} ||u(x_n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \, dx_n \,,$$

demonstrando ser a sucessão (u_μ) convergente para u em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

Dado $j = 1, 2, \ldots, n-1$ tem-se:

$$D_j u_\mu(x', x_n) = \theta_\mu(x_n)(D_j u)(x', x_n).$$

Sendo $D_j u$ um elemento de $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, tem-se que a sucessão $(D_j u_\mu)$ converge para $D_j u$ na topologia de $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Tem-se também:

$$D_n u_\mu(x', x_n) = \theta_\mu(x_n)(D_n u)(x', x_n) + \theta'_\mu(x_n) u(x', x_n).$$

Sendo $D_n u_\mu \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, a sucessão de funções dada pela primeira parcela da expressão anterior, converge para $D_n u$ em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Observe que $u \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ e $D_n u \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ onde $0 < T < \infty$, portanto $u \in C^0([0,T];L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ (ver J.L. Lions [13]). Disto vem que $u(0) = \gamma_0 u = 0$, onde $u(0)(x') = u(x',0)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Assim

$$u(x',x_n) = u(x',x_n) - u(x',0) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\,dt,$$

de onde, aplicando a desigualdade de Schwarz, obtém-se:

$$\begin{aligned} |u(x',x_n)|^2 &\leq x_n \int_0^{x_n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^2 dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\mu}\int_0^{2/\mu} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^2 dt, \end{aligned}$$

para $0 \leq x_n \leq 2/\mu$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\theta'_\mu(x_n)u(x',x_n)|^2\,dx'dx_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{1/\mu}^{2/\mu} \mu^2|u(x',x_n)|^2\,dx'dx_n \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{1/\mu}^{2/\mu} 2\mu \int_0^{2/\mu}\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^2 dt\,dx_n dx' = \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{2/\mu}\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^2 dtdx', \end{aligned}$$

provando que $(D_n u_\mu)$ converge para $D_n u$ em $L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

Caso 2: Tome $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Seja θ uma função teste no $\mathbb{R}^n$ tal que $\theta(x) = 1$ se $||x|| \leq 1$ e $\theta(x) = 0$ se $||x|| \geq 2$, $0 \leq \theta(x) \leq 1$. Para $\mu \in \mathbb{N}$ seja $\theta_\mu(x) = \theta(x/\mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $u_\mu(x) = \theta_\mu(x)u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n_+$. Então, (u_μ) converge para u na topologia de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Do Lema 2.11 resulta que $\gamma_0(u_\mu) = \gamma_0(\theta_\mu)\gamma_0(u) = 0$. Sendo $S(u_\mu) \subset \operatorname{supp}(\theta_\mu) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$, do Caso 1 resulta que $u_\mu \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, logo $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, o que completa a demonstração do teorema de traço no caso $\mathbb{R}^n_+$. ■

A seguir estuda-se o traço de funções definidas num aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Seja então Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira é denotada por Γ. Aqui precisa-se definir os espaços $H^s(\Gamma)$ com $s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, o qual será feito por meio de cartas locais de Γ.

Considere então

$$Q = \{(y',y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}; |y'_i| < 1,\ i = 1,2,\ldots,n-1, |y_n| < 1\},$$

$$Q^+ = Q \cap \{y_n > 0\},\ \Sigma = Q \cap \{y_n = 0\}$$

e um sistema de cartas locais $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_N, \varphi_N)\}$ de Γ verificando para cada
$k = 1, 2, \ldots, N$:

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_k(U_k) = Q,\ \varphi_k(U_k \cap \Omega) = Q^+,\ \varphi_k(U_k \cap \Gamma) = \Sigma. \\ \varphi_k\,,\ \varphi_k^{-1}\ \text{ são de classe }\ C^\infty. \\ \text{As condições de compatibilidade são satisfeitas, isto é, se} \\ U_k \cap U_\ell \neq \phi \text{ então existe um homeomorfsimo } J_{k\ell} \text{ de classe } C^\infty \\ \text{com jacobiano positivo de } \varphi_k(U_k \cap U_\ell) \text{ sobre } \varphi_\ell(U_k \cap U_\ell) \text{ tal que} \\ \qquad\qquad \varphi_\ell(x) = J_{k\ell}(\varphi_k(x)),\ \ \forall\, x \in U_k \cap U_\ell\,. \end{array} \right. \tag{2.74}$$

Considere funções testes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_N$ do $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq \sigma_k \leq 1,\ \ k = 0, \ldots, N,\ \ \operatorname{supp} \sigma_0 \subset \Omega \\ \operatorname{supp}(\sigma_k) \subset U_k\,,\ k = 1, \ldots, N,\ \ \text{e}\ \ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \sigma_k(x) = 1,\ \forall\, x \in \overline{\Omega} \end{array} \right. \tag{2.75}$$

Dada uma função w definida em Γ e $k = 1, \ldots, N$, seja

$$w_k(y') = \left| \begin{array}{ll} (\sigma_k w)(\varphi_k^{-1}(y', 0)) & \quad \text{se}\quad y' \in \Omega_0 =]-1, 1[^{n-1} \\ 0 & \quad \text{se}\quad y' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0\,. \end{array} \right. \tag{2.76}$$

Sendo $\operatorname{supp} w_k = \operatorname{supp}(\sigma_k \circ \varphi_k^{-1})\big|_\Sigma\,,$ $\quad (\operatorname{supp} \sigma_k) \cap \Gamma \subset U_k \cap \Gamma$ e como φ_k aplica $U_k \cap \Gamma$ sobre Σ, tem-se:

$$\operatorname{supp} w_k \subset \Sigma.$$

Note que $\Sigma = \{(y', 0); y' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$.

Define-se o espaço $\mathcal{D}(\Gamma)$, isto é, o espaço das funções C^∞ em Γ, como sendo o espaço das funções $w\colon \Gamma \mapsto \mathbb{K}$ tal que $w_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $k = 1, \ldots, N$. Assim w depende localmente de $(n-1)$ variáveis e suas derivadas parciais são definidas usando as derivadas parciais das w_k. Note que $\mathcal{D}(\Gamma)$ coincide com o espaço das funções $\mathcal{F} = \left\{ u|_\Gamma\,; u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \right\}$. Com efeito, claramente $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(\Gamma)$. Para mostrar a outra inclusão utilize a construção dada no Exemplo 1.4 do Capítulo 1 para prolongar de forma C^∞ cada w_k a $\mathbb{R}^n$. Observe também que se $w\colon \Gamma \mapsto \mathbb{K}$ é mensurável, isto é, cada w_k é mensurável, então o suporte de w é compacto pois Γ é limitado.

Dado número real s, $s \geq 0$, define-se $H^s(\Gamma)$ como sendo o espaço das funções $w\colon \Gamma \to \mathbb{K}$ tais que $w_k \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $k = 1, \ldots, N$, munido do produto escalar

$$(w, v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} (w_k, v_k)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

para todo par $w, v \in H^s(\Gamma)$. A norma deste espaço é denotada por $||w||_{H^s(\Gamma)}$. Tem-se

$$||w||^2_{H^s(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} ||w_k||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} . \tag{2.77}$$

Tem-se que $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert sendo $\mathcal{D}(\Gamma)$ denso em $H^s(\Gamma)$. Estes resultados podem ser mostrados usando as cartas locais $\mathcal{U}$ de Γ e notando que $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ é um espaço de Hilbert e que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ (ver Corolário 2.10 do Parágrafo 2.6).

Observação 2.21. Note que se $\{(V_1, \psi_1), \ldots, (V_M, \psi_M)\}$ é outro sistema de cartas locais de Γ satisfazendo as mesmas propriedades (2.74) que o sistema de cartas locais $\mathcal{U}$ de Γ então o novo produto escalar para $H^s(\Gamma)$ definido por

$$((u, v))_{H^s(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{M} (w_k, v_k)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

proporciona uma norma equivalente em $H^s(\Gamma)$ à norma $||u||_{H^s(\Gamma)}$ dada em (2.77). Assim a definição do espaço $H^s(\Gamma)$ não depende da escolha do sistema de cartas locais de Γ.

Para mostrar o teorema do traço para $u \in H^1(\Omega)$ precisa-se do seguinte resultado. Fixa-se $k = 1, \ldots, N$ e considera-se o espaço F_k das funções $w \colon \Gamma \mapsto \mathbb{K}$ tais que

$$w = 0 \text{ fora de } (\operatorname{supp} \sigma_k) \cap \Gamma \text{ e } v = w \circ \varphi_k^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Equipa-se este espaço com a norma

$$[w]_{H^s(\Gamma)} = ||v||_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

Proposição 2.25. *Tem-se, para $s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$:*

a) *$F_k \subset H^s(\Gamma)$ e em F_k as normas $[u]_{H^s(\Gamma)}$ e $||u||_{H^s(\Gamma)}$ são equivalentes.*

b) *Se $w \in H^s(\Gamma)$ então*

$$||w||^2_{H^s(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} [\sigma_k w]^2_{H^s(\Gamma)} .$$

Demonstração: Claramente se $(\operatorname{supp}\sigma_\ell)\cap(\operatorname{supp}\sigma_k)\cap\Gamma=\phi$ então

$$||w_\ell||_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}=0.$$

Aqui utiliza-se a notação (2.76). Seja então σ_ℓ tal que $(\operatorname{supp}\sigma_\ell)\cap(\operatorname{supp}\sigma_k)\cap\Gamma\neq\phi$. Da condição de compatibilidade do sistema de cartas locais $\mathcal{U}$ de Γ vem:

$$\varphi_\ell^{-1}(\xi',0)=\varphi_k^{-1}(J_{k\ell}^{-1}(\xi',0)),\ \ (\xi',0)\in\Sigma \tag{2.78}$$

e

$$\varphi_k^{-1}(y',0)=\varphi_\ell^{-1}(J_{k\ell}(y',0)),\ \ (y',0)\in\Sigma. \tag{2.79}$$

De (2.78) e notando que Σ é um aberto limitado de $\mathbb{R}^{n-1}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}||w_\ell||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}&=||(\sigma_\ell\circ\varphi_k^{-1}\circ J_{k\ell}^{-1})(w\circ\varphi_k^{-1}\circ J_{k\ell}^{-1})||^2_{H^s(\Sigma)}\leq\\&\leq C||w\circ\varphi_k^{-1}\circ J_{k\ell}^{-1}||^2_{H^s(\Sigma)}\leq C||w\circ\varphi_k^{-1}||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}\leq\\&\leq C[w]^2_{H^s(\Gamma)}\,.\end{aligned}$$

Esta expressão e (2.77) implicam

$$||w||^2_{H^s(\Gamma)}=\sum_{\ell=1}^N||w_\ell||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C[w]^2_{H^s(\Gamma)}. \tag{2.80}$$

Decorre desta desigualdade em particular que $w\in H^s(\Gamma)$. Da igualdade $w(x)=\sum\limits_{\ell=1}^N\sigma_\ell(x)w(x)$ para quase todo $x\in\Gamma$, e de (2.79), resulta

$$w\big(\varphi_k^{-1}\big)=\sum_{\ell=1}^N\big(\sigma_\ell\circ\varphi_\ell^{-1}\circ J_{k\ell}\big)\big(w\circ\varphi_\ell^{-1}\circ J_{k\ell}\big)\text{ q.s. em }\Sigma$$

$$\begin{aligned}||w\circ\varphi_k^{-1}||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}&\leq C\sum_{\ell=1}^N||(\sigma_\ell\circ\varphi_\ell^{-1}\circ J_{k\ell})(w\circ\varphi_\ell^{-1}\circ J_{k\ell})||^2_{H^s(\Sigma)}\leq\\&\leq C\sum_{\ell=1}^N||(\sigma_\ell\circ\varphi_\ell^{-1})(w\circ\varphi_\ell^{-1})||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}=C||w||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}\end{aligned}$$

isto é,

$$[w]^2_{H^s(\Gamma)}\leq C||w||^2_{H^s(\lneqq)}\,. \tag{2.81}$$

As desigualdades (2.80) e (2.81) proporcionam a parte **a)** da proposição. A parte **b)** é uma conseqüência de (2.77). ■

As diversas constantes $C > 0$ que aparecem na demonstração da Proposição 2.25 denotam uma constante genérica C independente de w. Nas demonstrações que seguem desta seção denotar-se-á com $C > 0$ a uma constante genérica independente das funções principais em estudo.

Seja $u \in H^1(\Omega)$ então $u = \sum_{k=0}^{N} \sigma_k u$ quase sempre em Ω. Para cada $k = 1, \ldots, N$ define-se a função

$$v_k(y', y_n) = \left| \begin{array}{lll} (\sigma_k u)(\varphi_k^{-1}(y', y_n)) & \text{se} & (y', y_n) \in Q^+ \\ 0 & \text{se} & (y', y_n) \in \mathbb{R}^n_+ \backslash Q^+ . \end{array} \right. \tag{2.82}$$

Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Denota-se por $\gamma_0 u$ à restrição de u a Γ. Tem-se:

Proposição 2.26. *Existe uma constante $C > 0$ independente de $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que*

$$||\gamma_0 u||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C||u||_{H^1(\Omega)} , \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Das Proposições 2.24, 2.17, do Lema 2.6 do Parágrafo 2.4, e de (2.82), vem:

$$\begin{aligned} \big[\gamma_0(\sigma_k u)\big]^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &= ||\gamma_0 v_k||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq ||v_k||^2_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = \\ &= ||v_k||^2_{H^1(Q^+)} \leq C||\sigma_k u||^2_{H^1(\Omega)} \leq C||u||^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

logo

$$||\gamma_0 u||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} [\sigma_k u]^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq CN||u||^2_{H^1(\Omega)}$$

que mostra a proposição. ■

Observando que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$, a Proposição 2.26 permite prolongar γ_0 por continuidade a $H^1(\Omega)$, prolongamento ainda denotado por γ_0, e obtém-se a aplicação linear e contínua

$$\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma).$$

As terminologias para $\gamma_0 u$ e γ_0 são as mesmas que as introduzidas para o espaço $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Note que, a menos de cartas locais de Γ, por construção γ_0 é a única aplicação linear e contínua de $H^1(\Omega)$ em $H^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\gamma_0 u = u|_{\Gamma} , \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Note também que

$$||\gamma_0 u||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} \left[(\gamma_0\sigma_k)(\gamma_0 u)\right]^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \forall\, u \in H^1(\Omega) \tag{2.83}$$

resultado que é conseqüência da parte **b)** da Proposição 2.25 e de que $\gamma_0(\sigma_k u) = (\gamma_0\sigma_k)(\gamma_0 u)$, para todo $u \in H^1(\Omega)$, fato que pode ser mostrado notando que a aplicação linear

$$H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad u \to \varphi u$$

com $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, é contínua (ver Proposição 2.17 do Parágrafo 2.6).

A seguir vem o teorema do traço para as funções $u \in H^1(\Omega)$.

Teorema 2.22. *O núcleo de γ_0 coincide com $H^1_0(\Omega)$ e γ_0 é sobrejetora.*

Demonstração:
a) O núcleo de γ_0 é $H^1_0(\Omega)$: Claramente, $H^1_0(\Omega)$ está contido no núcleo de γ_0. Por outro lado, seja $u \in H^1(\Omega)$. Considere uma sucessão (u_μ) de funções de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_\mu \to u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Então, para $k = 1, \ldots, N$,

$$\sigma_k u_\mu \to \sigma_k u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega).$$

Desta convergência e de (2.83) resulta

$$\gamma_0(\sigma_k u_\mu) \to \gamma_0(\sigma_k u) = 0 \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma).$$

Sejam $v_{k,\mu}$ e v_k as funções definidas por (2.82), segundo $\sigma_k v_\mu$ e $\sigma_k u$, respectivamente, então pelo Lema 2.6 do Parágrafo 2.4, vem que

$$v_{k,\mu} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}), \quad v_k \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$$

e pela última convergência,

$$\gamma_0(v_{k,\mu}) \to \gamma_0 v_k = 0.$$

Pelo Teorema 2.21 resulta então que $v_k \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$, que implica $v_k \in H^1_0(Q^+)$, portanto $\sigma_k u \in H^1_0(\Omega)$, para $k = 1, 2, \ldots, N$. Como $u = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k u + \sigma_0 u$ e $\sigma_0 u \in H^1_0(\Omega)$, obtém-se que $u \in H^1_0(\Omega)$.

b) γ_0 **é sobrejetora**: Seja $w \in \mathcal{D}(\Gamma)$. Tem-se $w(x) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k(x)w(x)$, $x \in \Gamma$.

De (2.82) vem que

$$w_k(y') = v_k(y', 0) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Pelo Teorema 2.21 resulta que existe $z_k \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ tal que

$$\gamma_0 z_k = w_k \quad \text{e} \quad ||z_k||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = ||w_k||_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \, . \tag{2.84}$$

Seja $\rho_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp} \rho_k \subset Q$ e $\rho_k = 1$ no suporte de $\sigma_k \circ \varphi_k^{-1}$. Tem-se:

$$\rho_k z_k \in H^1(Q^+) \quad \text{e} \quad \gamma_0(\rho_k z_k) = w_k \, .$$

Define-se $u_k(x) = (\rho_k z_k)(\varphi_k(x))$. Então pelo Lema 2.7 do Parágrafo 2.4 e pela última expressão, obtém-se que $u_k \in H^1(\Omega)$,

$$||u_k||_{H^1(\Omega)} \le C||\rho_k z_k||_{H^1(Q^+)} \text{ e } \gamma_0 u_k = (\gamma_o \sigma_k)w. \tag{2.85}$$

Tem-se de (2.84):

$$\begin{aligned} ||\rho_k z_k||^2_{H^1(Q^+)} \le C||z_k||^2_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = C||w_k||^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = \\ = C\big[(\gamma_0 \sigma_k)w\big]^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \, . \end{aligned}$$

As duas últimas expressões implicam

$$||u_k||^2_{H^1(\Omega)} \le C\big[(\gamma_0 \sigma_k)w\big]^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \, .$$

Seja $u = \sum_{k=1}^{N} u_k$ então $u \in H^1(\Omega)$, e de (2.85),

$$\gamma_0 u = \sum_{k=1}^{N} \gamma_0 u_k = \sum_{k=1}^{N} (\gamma_0 \sigma_k) w = w.$$

Também da última desigualdade resulta

$$\begin{aligned} ||u||^2_{H^1(\Omega)} = C \sum_{k=1}^{N} ||u_k||^2_{H^1(\Omega)} \le C \sum_{k=1}^{N} \big[(\gamma_0 \sigma_k)w\big]^2_{H^{1/2}(\Gamma)} = \\ = C||w||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

isto é,

$$||u||^2_{H^1(\Omega)} \leq C||w||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \, . \tag{2.86}$$

Seja $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ então existe uma sucessão (w_μ) de funções de $\mathcal{D}(\Gamma)$ tal que

$$w_\mu \to w \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma).$$

Seja $u_\mu \in H^1(\Omega)$ a função determinada em (2.86) com w_μ, logo $\gamma_0 u_\mu = w_\mu$. Note que por construção a $w_\mu - w_\tau$ corresponde $u_\mu - u_\tau$. De (2.86) resulta então

$$||u_\mu - u_\tau||_{H^1(\Omega)} \leq C||w_\mu - w_\tau||_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

portanto (u_μ) é uma sucessão de Cauchy em $H^1(\Omega)$. Seja $u \in H^1(\Omega)$ o limite desta sucessão. Então pela continuidade de γ_0 resulta

$$w_\mu = \gamma_0 u_\mu \to \gamma_0 u \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma).$$

Das duas últimas convergências vem então $\gamma_0 u = w$, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Observação 2.22. Seja $u \in H^1(\Omega)$ com $\gamma_0 u = 0$. Então pelo Teorema 2.22 vem que $u \in H^1_0(\Omega)$, portanto, existe uma sucessão (φ_μ) de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\varphi_\mu \to u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega)$$

isto é, u pode ser aproximado em $H^1(\Omega)$ por funções regulares cujas restrições a Γ são nulas. Com base nesses argumentos e por uma extensão de linguagem diz-se que se $u \in H^1(\Omega)$ com $\gamma_0 u = 0$, ou equivalentemente $u \in H^1_0(\Omega)$, então a restrição de u a Γ é zero.

A seguir estudar-se-á o traço das derivadas de funções u pertencentes a $H^m(\Omega)$, $m \geq 2$. Como no caso do estudo do traço de funções, inicia-se o estudo enunciando o teorema de traço para funções $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$. Antes, porém, será fixada a notação.

Como no início da seção, identifica-se a fronteira Γ de $\mathbb{R}^n_+$ com $\mathbb{R}^{n-1}$. Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Define-se

$$(\gamma_j u)(x') = (D^j_n u)(x', 0) = \gamma_0(D^j_n u)(x')$$

para $j = 0, 1, \ldots, m-1$ e $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, sendo $D_n = \dfrac{\partial}{\partial x_n}\cdot$ Representa-se por X ao espaço de Hilbert

$$X = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

e sua norma por

$$||w||_X^2 = \sum_{j=0}^{m-1} ||w_j||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

onde $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1})$. Note que $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}))^m$ é denso em X. Tem-se o teorema de traço para $H^m(\mathbb{R}^n_+)$:

Teorema 2.23. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. A aplicação linear*

$$\varphi \mapsto (\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi, \ldots, \gamma_{m-1}\varphi), \quad \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to X,$$

prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua γ em $H^m(\Omega)$, $m \geq 1$, sobre X, cujo núcleo é o espaço $H_0^m(\Omega)$. Tem-se ainda que γ possui uma inversa à direita linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear e contínua Λ de X em $H^m(\Omega)$ tal que $\gamma(\Lambda w) = w$ para todo $w \in X$.

A aplicação γ denomina-se *traço de ordem* $m-1$. O traço da função é o traço de ordem zero.

A demonstração do Teorema 2.23 será feita em três etapas.

Na primeira demonstra-se que a aplicação dada é contínua quando considera-se em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ a topologia de $H^m(\Omega)$. Para isto, basta provar que existe $C > 0$ tal que

$$||\gamma_j u||_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C||u||_{H^m(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

Na segunda etapa, prova-se que o núcleo de γ é o espaço $H_0^m(\Omega)$. Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $H_0^m(\Omega)$ e $\gamma u = 0$ para todo u em $\mathcal{D}(\Omega)$, portanto $H_0^m(\Omega)$ está contido no núcleo de γ_0, restará apenas demonstrar que se $u \in H^m(\Omega)$ e $\gamma_j u = 0$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, então $u \in H_0^m(\Omega)$. Finalmente, na terceira e última etapa da demonstração, constrói-se uma inversa à direita de γ, o que também provará que γ aplica $H^m(\Omega)$ sobre X.

Demonstração do Teorema 2.23

Primeira Etapa: Da Proposição 2.24 tem-se:

$$||\gamma_0 u||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq ||u||^2_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Fixe j para $j = 0, 1, \ldots, m-1$ e considere o multi-índice $\alpha = (\alpha', j)$ com $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Seja $\mathcal{F}_1$ a transformada de Fourier no $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Para todo u em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, tem-se:

$$|\,(x')^{\alpha'}\, \mathcal{F}_1(\gamma_j u)(x')| = |\mathcal{F}_1(\gamma_0(D^\alpha u))(x')|.$$

Observe, também, que se $|\alpha'| \leq m-j-1$, então $|\alpha| \leq m-1$, portanto

$$||D^\alpha u||^2_{H^1(\Omega)} \leq ||u||^2_{H^m(\Omega)}\,.$$

Das três últimas expressões resulta

$$\begin{aligned}
||\gamma_j u||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1+\|x'\|^2\right)^{1/2} \left(1+\|x'\|^2\right)^{m-j-1} \left|\mathcal{F}_1(\gamma_j u)\,(x')\right|^2\,dx' \leq \\
&\leq C \sum_{|\alpha'|\leq m-j-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1+\|x'\|^2\right)^{1/2} \left|\mathcal{F}_1(\gamma_0(D^\alpha u))\,(x')\right|^2\,dx' \leq \\
&\leq C \sum_{|\alpha'|\leq m-j-1} ||D^\alpha u||^2_{H^1(\Omega)} \leq ||u||^2_{H^m(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Segunda Etapa: Para provar que $\gamma^{-1}(0) = H^m_0(\Omega)$ serão salientados certos resultados enunciados e provados sob a forma de lemas.

Lema 2.12. *Se* $u \in H^m(\Omega)$ *e* $\gamma_0 u = \gamma_1 u = \cdots = \gamma_{m-1} u = 0$ *então*

$$|u(x',x_n)|^2 \leq \left(\frac{2}{\mu}\right)^{2m-1} \int_0^{2/\mu} |D^m_n\,u\,(x',t)\;dt$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ *e* $0 \leq x_n \leq \dfrac{2}{\mu}$, μ *inteiro positivo.*

Demonstração: O caso $m=1$ foi anteriormente demonstrado (ver Caso 1 da demonstração do Teorema 2.21). Suponha o Lema 2.12 verdadeiro para $m \geq 1$ e seja $u \in H^{m+1}(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = \gamma_1 u = \cdots = \gamma_{m-1} u = \gamma_m u = 0$. Sendo $\gamma_i(D_n u) = \gamma_{i+1} u = 0$ para $i = 1,2,\ldots,m-1$ e $D_n u \in H^m(\Omega)$, da hipótese indutiva vem:

$$\left|(D_n u)\,(x',t)\right|^2 \leq \left(\frac{2}{\mu}\right)^{2m-1} \int_0^{2/\mu} \left|D^{m+1}_n\,u\,(x',s)\right|^2\,ds$$

para que todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $0 \leq t \leq \dfrac{2}{\mu}\cdot$ Resulta, também, do caso $m=1$ que

$$\begin{aligned}
|u(x',x_n)|^2 &\leq \left(\frac{2}{\mu}\right) \int_0^{2/\mu} \left|D_n u\,(x',t)\right|^2\,dt \leq \\
&\leq \left(\frac{2}{\mu}\right)^{2m+1} \int_0^{2/\mu} \left|(D^{m+1}_n\,u)\,(x',s)\right|^2\,ds,
\end{aligned}$$

para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $0 \leq x_n \leq \dfrac{2}{\mu}\cdot$ ■

Lema 2.13. *Dado um inteiro positivo p, seja $\theta \in C^p(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \theta(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\theta(t) = 0$ se $t \leq 1$ e $\theta(t) = 1$ se $t \geq 2$. Para todo $\mu = 1, 2, \ldots$, seja $\theta_\mu(t) = \theta(\mu t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então:*

a) Se $u \in L^2(\Omega)$, seja $u_\mu(x) = \theta_\mu(x_n)u(x)$ para $x \in \Omega$, resulta que (u_μ) converge para u em $L^2(\Omega)$.

b) Se $u \in H^p(\Omega)$ e $\gamma_0 u = \gamma_1 u = \cdots = \gamma_{p-1}u = 0$, então a sucessão (v_μ) converge para zero em $L^2(\Omega)$, onde v_μ é dada por:

$$v_\mu(x) = \theta_\mu^{(p)}(x_n)u(x), \quad x \in \Omega.$$

Demonstração: A primeira parte é uma conseqüência direta do teorema de Lebesgue sobre convergência dominada. Para demonstrar a parte **b)**, considere-se $M > 0$ tal que $|\theta^{(p)}(t)| \leq M$, $t \in \mathbb{R}$. Usando o Lema 2.12 obtém-se para μ suficientemente grande:

$$||v_\mu||^2_{L^2(\Omega)} \leq M \int_0^{2/\mu} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D_n^p\, u\,(x',t)|^2 \; dx'dt = M \int_0^{2/\mu} ||D_n^p\, u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\, dt.$$

Notando que $||D_n^p\, u(t)||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \in L^2(0, \infty)$ vem então que (v_μ) converge para zero em $L^2(\Omega)$. ■

Observação 2.23. Para determinar uma função θ nas condições do Lema 2.13 pode-se proceder como segue. Considere uma função $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \sigma \leq 1$, $\sigma(t) = 1$ para $\dfrac{3}{2} \leq t \leq \dfrac{5}{2}$ e $\sigma(t) = 0$ para $t \geq 1$, $t \geq 3$ (ver Exemplo 1.4 do Capítulo 1). Então

$$\theta(t) = \left| \begin{array}{lll} \sigma(t) & \text{se} & t \leq 2 \\ 1 & \text{se} & t > 2 \end{array} \right.$$

satisfaz as condições requeridas. ■

Prova-se, a seguir, que $\gamma^{-1}(0) \subset H_0^m(\Omega)$. Seja $\theta \in C^m(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \theta(t) \leq 1$, $\theta(t) = 0$ se $t \leq 1$ e $\theta(t) = 1$ se $t \geq 2$. Considere-se $u \in H^m(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = \gamma_1 u = \cdots = \gamma_{m-1}u = 0$. Se $\theta_\mu(t) = \theta(\mu t)$, $\mu = 1, 2, \ldots$ e $t \in \mathbb{R}$, seja

$$u_\mu(x', x_n) = \theta_\mu(x_n)u(x', x_n), \;\; x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \;\; x_n > 0.$$

Considere-se o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, j) = (\alpha', j)$ com $|\alpha'| + j \leq m$. No caso $j = 0$ tem-se:

$$(D^\alpha u_\mu)(x', x_n) = \theta_\mu(x_n)(D^\alpha u)(x', x_n),$$

portanto, pelo Lema 2.13, resulta que $(D^\alpha u_\mu)$ converge para $D^\alpha u$ em $L^2(\Omega)$.

No caso $0 < j \leq m$, tem-se:

$$(D^\alpha u_\mu)(x) = \theta_\mu(x_n)(D^\alpha u)(x) + \sum_{p=1}^{j} \binom{j}{p} \theta_\mu^{(p)}(x_n)(D_n^{j-p}\, D^{\alpha'} u)(x).$$

Para continuar a demonstração, admite-se o seguinte resultado, o qual será provado ao final da segunda etapa.

Lema 2.14. *Seja $q > 1$ um inteiro. Então*

$$D^{\alpha'}(\gamma_i \varphi) = \gamma_i(D^{\alpha'} \varphi)$$

para toda $\varphi \in H^q(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, q-1$ e multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, i) = (\alpha', i)$ tal que $|\alpha| = |\alpha'| + i \leq q - 1$.

Admitindo o Lema 2.14, obtém-se que $\gamma_i(D_n^{j-p}\, D^{\alpha'} u) = 0$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ e $p = 1, 2, \ldots, j$. Note que $0 < j \leq m$. Usando este resultado e a parte b) do Lema 2.13 decorre que a segunda parcela que aparece na expressão para $D^\alpha u_\mu$ converge para zero em $L^2(\Omega)$. Logo, a sucessão $(D^\alpha u_\mu)$ converge para $D^\alpha u$ em $L^2(\Omega)$. Resulta, daí, que a sucessão (u_μ) converge para u em $H^m(\Omega)$.

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(x) = 1$ se $||x|| \leq 1$ e $\varphi(x) = 0$ se $||x|| \geq 2$. Para todo $\ell = 1, 2, \ldots$, seja $u_{\mu,\ell}(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\ell}\right) u_\mu(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n_+$. Então $u_{\mu,\ell}$ é um vetor de $H^m(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, logo $u_{\mu,\ell} \in H_0^m(\Omega)$. Sendo $(u_{\mu,\ell})$ convergente para u_μ em $H^m(\Omega)$, quando ℓ tende para o infinito, conclui-se que $u_\mu \in H_0^m(\Omega)$, logo $u \in H_0^m(\Omega)$.

Resta, para completar a demonstração da segunda etapa, provar o Lema 2.14, o que será feito a seguir.

Para demonstrar o Lema 2.14, suponha que ele seja verdadeiro para φ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Dado v em $H^q(\Omega)$, seja (φ_μ) uma sucessão de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ convergente para v em $H^q(\Omega)$. Logo, $(\gamma_i \varphi_\mu)$ converge para $\gamma_i v$ em $H^{q-i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, e como por hipótese $|\alpha| \leq q-i-1 < q - i - \dfrac{1}{2}$, tem-se:

$$D^\alpha(\gamma_i \varphi_\mu) \quad \text{converge para} \quad D^\alpha(\gamma_i v)$$

em $H^s(\Gamma)$, $s = q - |\alpha| - i - \dfrac{1}{2}\cdot$ Tem-se, também, $(D^\alpha \varphi_\mu)$ convergente para $D^\alpha v$ em $H^{q-|\alpha|}(\Omega)$, portanto:

$$\gamma_i(D^\alpha \varphi_\mu) \quad \text{converge para} \quad \gamma_i(D^\alpha v)$$

em $H^s(\Gamma)$. Conclui-se que $\gamma_i(D^\alpha v) = D^\alpha(\gamma_i v)$ como se desejava provar.

Terceira Etapa: Deduz-se o argumento descrito para esta etapa, como nas anteriores, por meio de lemas.

Lema 2.15. *Para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, vale a seguinte relação:*

$$\mathcal{F}_1(\gamma_j u)\,(x') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (it)^j (\mathcal{F}u)(x', t)\, dt,$$

para x' no $\mathbb{R}^{n-1}$, sendo $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier no $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Represente por $\widetilde{\mathcal{F}}$ e $\widetilde{\mathcal{F}}_1$, respectivamente, as transformadas de Fourier inversas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$. Sendo $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}u) = u$, obtém-se:

$$u(x', x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{\mathbb{R}} e^{i\{(x',y') + x_n y_n\}}\, (\mathcal{F}u)(y', y_n)\, dy_n\,.$$

Fazendo

$$w\,(x') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (it)^j\, (\mathcal{F}u)(x', t)\, dt,$$

obtém-se, da última expressão:

$$\begin{aligned}
(\gamma_j u)(x') &= (D_n^j u)(x', 0) = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_{\mathbb{R}} (iy_n)^j\, e^{i(x',y')} (\mathcal{F}u)(y', y_n)\, dy_n = \\
&= (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x',y')}\, w(y') dy' = (\widetilde{\mathcal{F}}_1 w)(x'),
\end{aligned}$$

de onde resulta $\mathcal{F}_1(\gamma_j u) = w$, como se deseja demonstrar. ■

Prova-se, a seguir, que existe uma aplicação linear

$$\Lambda \colon (\mathcal{D}(\Gamma))^m \to H^m(\Omega),$$

contínua relativamente à topologia de $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, tal que $\gamma\Lambda\varphi = \varphi$ para todo φ em $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$. Provada esta afirmativa, usa-se a densidade de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ em $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ para estender Λ a este último espaço, sendo, obviamente, tal extensão, linear, contínua e uma inversa à direita de γ. Dado $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1})$ em $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ e para $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, considere-se

$$a_j = \int_{\mathbb{R}} t^{2j} (1 + t^2)^{-(m+j)}\, dt$$

e

$$v_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, a_j i^j}\, \frac{(1+\|x'\|^2)^{m-\frac{1}{2}}}{(1+||x||^2)^{m+j}}\, x_n^j (\mathcal{F}_1 w_j)(x'),$$

sendo $x = (x', x_n)$ no $\mathbb{R}^n$.

Da escolha de a_j resulta:

1. $$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (it)^j\, v_j(x', t)\, dt = (\mathcal{F}_1 w_j)(x').$$

Com efeito, se $A_j(x')$ denota o membro esquerdo de 1., obtém-se:

$$\begin{aligned} A_j(x') &= \frac{(\mathcal{F}_1 w_j)(x')}{a_j} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2j}(1+\|x'\|^2)^{m-\frac{1}{2}}}{(1+\|x'\|^2+t^2)^{m+j}}\, dt = \\ &= \frac{(\mathcal{F}_1 w_j)(x')}{a_j} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2j}(1+\|x'\|^2)^{m-\frac{1}{2}}/(1+\|x'\|^2)^{m+j}\, dt}{\left[1+t^2/(1+\|x'\|^2)\right]^{m+j}} \cdot \end{aligned}$$

Fazendo-se a mudança de variáveis $s = t/(1+\|x'\|^2)^{\frac{1}{2}}$, obtém-se então

$$A_j(x') = \frac{(\mathcal{F}_1 w_j)(x')}{a_j} \int_{\mathbb{R}} s^{2j}(1+s^2)^{-(m+j)}\, ds$$

que implica a igualdade desejada.

Tem-se:

2. $$\int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^m \left| v_j\left(x', \frac{x_n}{\ell}\right)\right|^2 dx \le C||w_j||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

para todo $j = 0, 1, 2 \ldots, m-1$, sendo $C > 0$ uma constante independente de $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}) \in (\mathcal{D}(\Gamma))^m$ e de $\ell = 1, 2, \ldots, m$.

Mostra-se 2. De fato, se B_j representa o membro esquerdo de 2., obtém-se:

$$B_j = \frac{2\pi}{a_j^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}_1 w_j\,(x')|^2\, (1+\|x'\|^2+x_n^2)^m\, \frac{(1+\|x'\|^2)^{2m-1}}{\left(1+\|x'\|^2+\frac{x_n^2}{\ell^2}\right)^{2(m+j)}} \left(\frac{x_n}{\ell}\right)^{2j} dx' dx_n.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x_n = \ell t(1+\|x'\|^2)^{1/2}$ nesta expressão vem :

$$B_j = \frac{2\pi}{a_j^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\|x'\|^2)^{m-j-\frac{1}{2}}\, |(\mathcal{F}_1 w_j)\,(x')|^2\, dx' \int_{\mathbb{R}} \frac{\ell(1+\ell^2 t^2)^m\, t^{2j}}{(1+t^2)^{2(m+j)}}\, dt.$$

Notando que $1 \le \ell \le m$, resulta

$$\frac{\ell(1+\ell^2 t^2)^m}{(1+t^2)^{m+j}} \le \frac{\ell[\ell^2(1+t^2)]^m}{(1+t^2)^{m+1}} \le m^{2m+1}$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ell(1+\ell^2t^2)^m\, t^{2j}}{(1+t^2)^{2(m+j)}}\, dt \leq m^{2m+1} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{2j}}{(1+t^2)^{m+j}}\, dt = m^{2m+1}\, a_j\,.$$

Combinando-se esta desigualdade com a penúltima expressão, obtém-se:

$$\begin{aligned} B_j &\leq \frac{2\pi}{a_j}\, m^{2m+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+\|x'\|^2)^{m-j-\frac{1}{2}}\, \left|(\mathcal{F}_1 w_j)\,(x')\right|^2\, dx' \leq \\ &\leq C||w_j||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{aligned}$$

com $C = 2\pi\, \dfrac{m^{2m+1}}{a_j}$ que mostra a desigualdade 2.

Sejam $C_{\ell j}$ $(\ell = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 0, 1, \ldots, m-1)$ números reais tais que

3. $$\sum_{\ell=1}^{m} C_{\ell k}\, \ell^{j+1} = \delta_{jk} = \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{se} & j = k \\ 0 & \text{se} & j \neq k. \end{array} \right.$$

(Para a resolução deste sistema de equações ver o determinante de Vandermonde que aparece na demonstração do Teorema 2.13 do Parágrafo 2.4).

Considere $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ definida por

4. $$u(x) = u(x', x_n) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{m} C_{\ell k}\, v_k\left(x', \tfrac{x_n}{\ell}\right).$$

Define-se

5. $$\Lambda\, w = \widetilde{\mathcal{F}}\, u\big|_{\Omega}\,.$$

onde $\widetilde{\mathcal{F}}$ é a transformada de Fourier inversa definida em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

De 2. decorre que $\widetilde{\mathcal{F}}u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ onde $\widetilde{\mathcal{F}}$ é a transformada de Fourier inversa definida em $L^2(\mathbb{R}^n)$, logo $\Lambda w \in H^m(\Omega)$ e, além disso,

$$||\Lambda w||_{H^m(\Omega)} \leq C||w||_{\prod\limits_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Mostra-se sem dificuldade que Λ é uma aplicação linear. Conclui-se, deste modo, que Λ é uma aplicação linear e contínua de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$, com a topologia de $X = \prod\limits_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, em $H^m(\Omega)$.

A seguir provar-se-á que $\gamma\Lambda w = w$, para todo $w \in (\mathcal{D}(\Gamma))^m$, ou, equivalentemente, que $\mathcal{F}_1(\gamma_j \Lambda w) = \mathcal{F}_1 w_j$, para $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Com efeito, do Lema

2.15 e da definição 4. de u, resulta

$$\mathcal{F}_1(\gamma_j \Lambda w)(x') = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (it)^j \, u(x', t)\, dt =$$
$$= (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{m} C_{\ell k} \int_{\mathbb{R}} (it)^j \, v_k\left(x', \frac{t}{\ell}\right) dt.$$

Levando em consideração a definição 3. dos $C_{\ell k}$ e fazendo a mudança de variáveis $s = t/\ell$ nesta última integral, obtém-se

$$\mathcal{F}_1(\gamma_j \Lambda w)\,(x') = (2\pi)^{-1/2} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \sum_{\ell=1}^{m} C_{\ell k}\, \ell^{j+1} \right\} \int_{\mathbb{R}} (is)^j \, v_k(x', s)\, ds =$$
$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (is)^j \, v_j(x', s)\, ds = (\mathcal{F}_1 w_j)(x').$$

A propriedade $\gamma \Lambda w = w$, para todo $w \in X$ seguirá da densidade de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ em X e da continuidade dos operadores γ e Λ. Conclui-se assim a demonstração do Teorema 2.23. ■

A seguir analisa-se o traço das derivadas de funções definidas num aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.

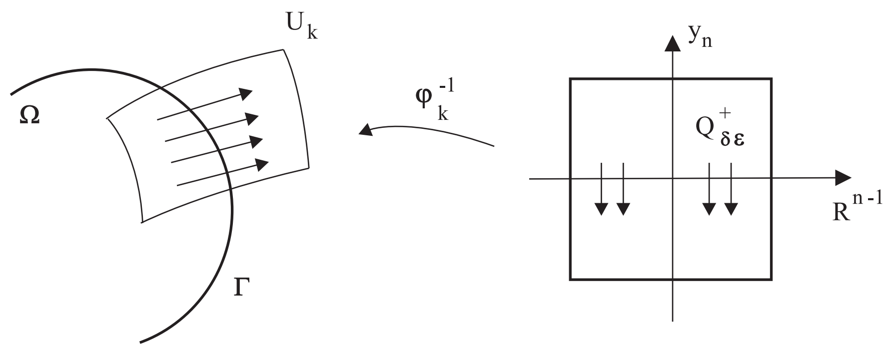
Seja então Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ e $\nu(x)$ a normal unitária exterior em $x \in \Gamma$. Para $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ introduz-se as notações

$$Q_{\delta\varepsilon} = \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n; |y'_i| < \delta, i = 1, 2, \ldots, n-1, -\varepsilon < y_n < \varepsilon\}$$
$$Q^+_{\delta\varepsilon} = Q_{\delta\varepsilon} \cap \{y_n > 0\}, \;\; \Sigma_\delta = Q_{\delta\varepsilon} \cap \{y_n = 0\}.$$

($Q_{11} = Q$ e $\Sigma_1 = \Sigma$). Para poder aplicar a Ω os resultados de traço obtidos para $\mathbb{R}^n_+$ precisa-se de um sistema de cartas locais $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \ldots, (U_N, \varphi_N)\}$ para Γ que além das propriedades assinaladas em (2.74), mudando Q por $Q_{\delta\varepsilon}$, verifique também a seguinte propriedade geométrica:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Cada } \varphi_k^{-1} \text{ aplica vetores ortogonais a } \Sigma_\delta \text{ e do mesmo sentido} \\ \text{que o vetor } (0, 0, \ldots, 0, -1) \text{ do } \mathbb{R}^n \text{ em vetores ortogonais} \\ \text{a } \Gamma \cap U_k \text{ e dirigidos ao exterior de } \Omega,\ k = 1, 2, \ldots, N. \end{array} \right. \tag{2.87}$$

Graficamente esta propriedade adota a seguinte forma:



Um sistema de cartas locais $\{(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_N, \varphi_N)\}$ de Γ satisfazendo a condição (2.87) verifica, como será mostrado mais adiante, para $k = 1, 2, \ldots, N$, a igualdade

$$\frac{\partial^m}{\partial y_n^m} v_k(y', 0) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \nu^m} (\sigma_k u)(\varphi_k^{-1}(y', 0))$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $(y', 0) \in \Sigma$ e $m = 1, 2, \ldots,$. Para as definições de σ_k e v_k, ver (2.75) e (2.82), respectivamente. Esta igualdade permite obter resultados de traço para funções definidas em Ω análogos aos obtidos no Teorema 2.23 para funções definidas em $\mathbb{R}^n_+$.

A seguir constrói-se um sistema de cartas locais para Γ verificando as condições requeridas. Para isto utiliza-se a noção de vizinhança tubular (ver, por exemplo, M.P. do Carmo [5]). Seja então $x^* \in \Gamma$. Considere uma carta local $\{V, \psi\}$ para x^* verificando as condições (2.74). Assim

$$\psi \colon V \to Q, \qquad \psi^{-1} \colon Q \to V$$

são bijeções de classe C^∞ e verifica-se

$$\psi(V \cap \Omega) = Q^+, \quad \psi(V \cap \Gamma) = \Sigma, \quad \psi(x^*) = 0, \;\; 0 \in \mathbb{R}^n.$$

A existência de $\{V, \psi\}$ satisfazendo estas condições é obtida aplicando dilatações, translações e restrições a uma carta genérica para x^*.

Considere a aplicação $\xi \colon Q \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\xi(y', y_n) = \psi^{-1}(y', 0) - y_n \nu(\psi^{-1}(y', 0)). \tag{2.88}$$

Como ψ^{-1} e ν são de classe C^∞ vem que ξ é de classe C^∞. Tem-se:

$$D\xi(0) = \left(\frac{\partial \xi_i(0)}{\partial y_j}\right) =$$
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \psi_1^{-1}(0)}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi_1^{-1}(0)}{\partial y_{n-1}} & -\nu_1\big(\psi^{-1}(0)\big) \\ \dfrac{\partial \psi_2^{-1}(0)}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi_2^{-1}(0)}{\partial y_{n-1}} & -\nu_2\big(\psi^{-1}(0)\big) \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial \psi_n^{-1}(0)}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi_n^{-1}(0)}{\partial y_{n-1}} & -\nu_n\big(\psi^{-1}(0)\big) \end{bmatrix}$$

As $(n-1)$ primeiras colunas desta matriz formam $(n-1)$ vetores tangentes a Γ em x^* e estes vetores são linearmente independentes pois $\psi^{-1}\colon \Sigma \to V \cap \Gamma$ é injetora de classe C^1. A última coluna da matriz é um vetor ortogonal ao plano tangente determinado em x^*. Portanto as colunas de $D\xi(0)$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$ no ponto x^*. Assim a matriz $D\xi(0)$ é invertível. Segue então pelo Teorema da Aplicação Inversa que existe um paralelepípedo $Q_{\delta\varepsilon}$ de $\mathbb{R}^n$ e uma vizinhança U de x^* tal que $\xi\colon Q_{\delta\varepsilon} \to U$ é uma bijeção de $Q_{\delta\varepsilon}$ sobre U e ξ, ξ^{-1} são de classe C^∞. Então (U,φ) com $\varphi = \xi^{-1}$ é uma carta local para x^* que satisfaz as condições requeridas. Note de (2.88) que $\varphi^{-1}(y',0) = \psi^{-1}(y',0)$.

Como $x^* \in \Gamma$ foi arbitrário e Γ é compacto segue-se do exposto que existe um sistema de cartas locais $\{(U_1,\varphi_1),\dots,(U_N,\varphi_N)\}$ para Γ tal que

$$\varphi_k\colon U_k \to Q_{\delta_j\varepsilon_j} \quad \text{e} \quad \varphi_k^{-1}\colon Q_{\delta_j\varepsilon_j} \to U_k$$

são bijeções de classe C^∞, $k = 1,2,\dots,N$. Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1,\dots,\delta_N\}$, $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N\}$ e fazendo-se as respectivas modificações nos U_j, obtém-se um sistema de cartas locais $\mathcal{V} = \{(U_1,\varphi_1),\dots,(U_N,\varphi_N)\}$ de Γ tal que

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_k\colon U_k \to Q_{\delta\varepsilon} \quad \text{e} \quad \varphi_k^{-1}\colon Q_{\delta\varepsilon} \to U_k \\ \text{são bijeções de classe } C^\infty; \\ \varphi_k(U_k \cap \Omega) = Q^+_{\delta\varepsilon}\,, \quad \varphi_k(U_k \cap \Gamma) = \Sigma_\delta \\ \varphi_k^{-1}(y',y_n) = \varphi_k^{-1}(y',0) - y_n\,\nu(\varphi_k^{-1}(y',0)),\ \ \forall\,(y',y_n) \in Q_{\delta\varepsilon}\,, \\ k = 1,2,\dots,N; \\ \text{e as condições de compatibilidade são satisfeitas, isto é, se } U_\ell \cap U_k \neq \phi \\ \text{existe um homeomorfismo } J_{k\ell} \text{ de classe } C^\infty \text{ com jacobiano positivo de} \\ \varphi_k(U_\ell \cap U_k) \text{ sobre } \varphi_\ell(U_\ell \cap U_k) \text{ tal que} \\ \varphi_\ell(x) = J_{k\ell}(\varphi_k(x)), \quad \forall\, x \in U_\ell \cap U_k\,. \end{array}\right. \tag{2.89}$$

Os espaços $H^s(\Gamma)$ definidos utilizando-se o sistema de cartas locais $\mathcal{U}$ de Γ verificando as condições (2.74) e os definidos por meio do sistema de cartas locais $\mathcal{V}$ de Γ verificando (2.89) são iguais e têm normas equivalentes (ver Observação 2.21).

Conseqüentemente a demonstração do Teorema 2.22 pode ser feita utilizando-se o sistema de cartas locais $\mathcal{V}$ de Γ e obtém-se o mesmo resultado.

No que segue desta seção considerar-se-á o sistema de cartas locais $\mathcal{V}$ de Γ verificando (2.89).

Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Introduz-se as funções

$$z_k(y', y_n) = u(\varphi_k^{-1}(y', y_n)), \ (y', y_n) \in Q_{\delta\varepsilon}^+ \cup \Sigma_\delta = Q^*$$

$k = 1, 2, \ldots, N$. Tem-se o seguinte resultado:

Lema 2.16. *Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Então para cada $k = 1, 2, \ldots, N$, verifica-se*

$$\frac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, z_k(y', y_n) = (-1)^j \,\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\, (\varphi_k^{-1}(y', y_n)), \quad \forall\, (y', y_n) \in Q^*$$

para $j = 1, 2, \ldots$.

Demonstração: A prova será feita por indução com relação a j. Para $(y', y_n) \in Q^*$ fixado e $h > 0$ pequeno, tem-se:

$$\frac{1}{h}\left[z_k(y', y_n + h) - z_k(y', y_n)\right] = \frac{1}{h}\left[u(\varphi_k^{-1}(y', y_n + h)) - u(\varphi_k^{-1}(y', y_n))\right] =$$

$$= -\frac{1}{(-h)}\left[u(\varphi_k^{-1}(y', 0) - (y_n + h)\nu(\varphi_k^{-1}(y', 0))) - u(\varphi_k^{-1}(y', 0) - y_n\nu(\varphi_k^{-1}(y', 0)))\right].$$

Fazendo-se $h \to 0$ resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_n}\, z_k(y', y_n) &= (-1)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\, u(\varphi_k^{-1}(y', 0) - y_n\nu(\varphi_k^{-1}(y', 0))) = \\ &= (-1)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\, u(\varphi_k^{-1}(y', y_n))\end{aligned}$$

que mostra o lema para $j = 1$. Suponha o lema válido para $j \geq 1$. Mostrar-se-á o resultado para $j + 1$. Tem-se, pela hipótese de indução e para $h > 0$ pequeno:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left[\frac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, z_k(y', y_n + h) - \frac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, z_k(y', y_n)\right] = \\ &= (-1)^j\,\frac{1}{h}\left[\frac{\partial^j}{\partial \nu^j}\, u(\varphi_k^{-1}(y', 0) - (y_n + h)\nu(\varphi_k^{-1}(y', 0))) - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial^j}{\partial \nu^j}\, u(\varphi_k^{-1}(y', 0) - y_n\nu(\varphi_k^{-1}(y', 0)))\right].\end{aligned}$$

Fazendo-se $h \to 0$, obtém-se o lema para $j+1$. ■

Sejam $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\operatorname{supp} \sigma_0 \subset \Omega,\ 0 \le \sigma_k \le 1,\ k = 0, 1, \ldots, N$$

$$\operatorname{supp} \sigma_k \subset U_k\,,\ k = 1, 2, \ldots, N \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{N} \sigma_k(x) = 1,\ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Considere as funções

$$v_k(y', y_n) = h_k(y', y_n) z_k(y', y_n) = \left| \begin{array}{l} \sigma_k(\varphi_k^{-1}(y', y_n)) u(\varphi_k^{-1}(y', y_n)) \text{ se } (y', y_n) \in \overline{Q^+_{\delta\varepsilon}} \\ 0 \quad \text{se} \quad (y', y_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \backslash \overline{Q^+_{\delta\varepsilon}} \end{array} \right. \tag{2.90}$$

$k = 1, 2, \ldots, N$. Pelo Lema 2.16 resulta

$$\frac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, v_k(y', y_n) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^j}{\partial \nu^j}\,(\sigma_k u)(\varphi_k^{-1}(y', y_n)) \text{ se } (y', y_n) \in \overline{Q^+_{\delta\varepsilon}} \\ 0 \quad \text{se} \quad (y', y_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \backslash \overline{Q^+_{\delta\varepsilon}} \end{array} \right. \tag{2.91}$$

e

$$h_k(y', y_n)\, \frac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, z_k(y', y_n) = \left| \begin{array}{l} \sigma_k(\varphi_k^{-1}(y', y_n))\, \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \left(\varphi_k^{-1}(y', y_n)\right) \text{ se } (y', y_n) \in \overline{Q^+_{\delta\varepsilon}} \\ 0 \quad \text{se} \quad (y', y_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \backslash \overline{Q^+_{\delta\varepsilon}} \end{array} \right. \tag{2.92}$$

para $j = 1, 2, \ldots$.

Da igualdade $u(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \sigma_k(x) u(x), \quad x \in \overline{\Omega}$, vem, para $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$:

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^j}{\partial \nu^j}\,(\sigma_k u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k\, \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \tag{2.93}$$

Denota-se por $\gamma_j u$ e $\sigma_k\, \gamma_j u$ as respectivas restrições a Γ das funções $\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ e $\sigma_k\, \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$, $j = 0, 1, \ldots$. Também denota-se por $\gamma_j v_k$ e $h_k \gamma_j z_k$ as respectivas restrições a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ das funções $\dfrac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, v_k$ e $h_k\, \dfrac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, z_k\,, \quad j = 0, 1, \ldots$. Define-se para $s \ge 0,\ s \in \mathbb{R}$, a nova norma para $\gamma_j u$ em $H^s(\Gamma)$:

$$|||\gamma_j u|||^2_{H^s(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} ||\gamma_j v_k||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{k=1}^{N} ||\gamma_j (h_k z_k)||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.94}$$

para $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

O seguinte resultado vai estabelecer a relação desta nova norma e a norma usual

$$||\gamma_j u||^2_{H^s(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} ||h_k \gamma_j z_k||^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}, \; j = 0, 1, \ldots \tag{2.95}$$

(ver (2.92) e (2.93)). Claramente $|||\gamma_0 u|||_{H^s(\Gamma)}$ é igual a $||\gamma_0 u||_{H^s(\Gamma)}$.

Lema 2.17. *Sejam $s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Então existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ independentes de u tais que*

$$C_1 \sum_{j=0}^{m} ||\gamma_j u||^2_{H^s(\Gamma)} \leq \sum_{j=0}^{m} |||\gamma_j u|||^2_{H^s(\Gamma)} \leq C_2 \sum_{j=0}^{m} ||\gamma_j u||^2_{H^s(\Gamma)}.$$

Demonstração: Far-se-á a demonstração por indução com relação a m. Antes porém lembra-se que a aplicação linear

$$H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^s(\mathbb{R}^{n-1}), \;\; u \to \rho u$$

onde $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, é contínua (ver Proposição 2.17 do Parágrafo 2.6). Isto implica, como pode ser provado sem dificuldade, que a aplicação linear

$$H^s(\Gamma) \to H^s(\Gamma), \quad u \to \sigma u \tag{2.96}$$

onde $\sigma \in \mathcal{D}(\Gamma)$, é contínua. Claramente, se $m = 0$ tem-se uma igualdade com $C_1 = C_2 = 1$. Suponha então o lema válido para $m \geq 0$. Mostra-se que o lema é válido para $m+1$. Com efeito, das igualdades

$$\frac{\partial^{m+1} u}{\partial \nu^{m+1}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \nu^{m+1}} (\sigma_k u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^{m+1} u}{\partial \nu^{m+1}} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \frac{\partial^{m+1} u}{\partial \nu^{m+1}}$$

vem por definição,

$$|||\gamma_{m+1} u|||^2_{H^s(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_n^{m+1}} (h_k z_k) \right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.97}$$

e

$$||\gamma_{m+1} u||^2_{H^s(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{N} \left\| h_k \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_n^{m+1}} z_k \right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.98}$$

Da igualdade

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial y_n^{m+1}}(h_k z_k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} \left(\frac{\partial^{m+1-j}}{\partial y_n^{m+1-j}} h_k \right) \left(\frac{\partial^j z_k}{\partial y_n^j} \right) + h_k \left(\frac{\partial^{m+1}}{\partial y_n^{m+1}} z_k \right)$$

resulta

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_n^{m+1}}(h_k z_k) \right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} &\leq C \sum_{j=0}^{m} \left\| \left(\frac{\partial^{m+1-j} h_k}{\partial y_n^{m+1-j}} \right) \left(\frac{\partial^j z_k}{\partial y_n^j} \right) \right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} + \\ &+ C \left\| h_k \frac{\partial^{m+1} z_k}{\partial y_n^{m+1}} \right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \end{aligned} \tag{2.99}$$

Do Lema 2.16, da Proposição 2.25 e de (2.97), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\partial^{m+1-j}}{\partial y_n^{m+1-j}} h_k \right) \left(\frac{\partial^j z_k}{\partial y_n^j} \right) \right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} &= \left[\left(\frac{\partial^{m+1-j}}{\partial \nu^{m+1-j}} \sigma_k \right) \left(\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \right) \right]^2_{H^s(\Gamma)} \leq \\ &\leq C ||\gamma_j u||^2_{H^s(\Gamma)} . \end{aligned} \tag{2.100}$$

Levando em consideração (2.97)-(2.100), resulta

$$|||\gamma_{m+1} u|||^2_{H^s(\Gamma)} \leq C \sum_{j=0}^{m+1} ||\gamma_j u||^2_{H^s(\Gamma)} .$$

A hipótese de indução e esta última desigualdade implicam

$$\sum_{j=0}^{m+1} |||\gamma_j u|||^2_{H^s(\Gamma)} \leq C \sum_{j=0}^{m+1} ||\gamma_j u||^2_{H^s(\Gamma)} . \tag{2.101}$$

Da igualdade

$$h_k \left(\frac{\partial^{m+1}}{\partial y_n^{m+1}} z_k \right) = \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_n^{m+1}}(h_k z_k) - \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} \left(\frac{\partial^{m+1-j}}{\partial y_n^{m+1-j}} h_k \right) \left(\frac{\partial^j z_k}{\partial y_n^j} \right)$$

e aplicando os mesmos argumentos utilizados na obtenção de (2.101), obtém-se:

$$||\gamma_{m+1} u||^2_{H^2(\Gamma)} \leq C \sum_{j=0}^{m+1} |||\gamma_j u|||^2_{H^s(\Gamma)}$$

que acarreta, pela hipótese de indução,

$$\sum_{j=0}^{m+1} ||\gamma_j u||^2_{H^s(\Gamma)} \leq C \sum_{j=0}^{m+1} |||\gamma_j u|||^2_{H^s(\Gamma)} \,. \tag{2.102}$$

As desigualdades (2.101) e (2.102) provam o lema. ■

Seja $m \geq 1$, m inteiro. Denota-se por Y ao espaço de Hilbert

$$Y = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

e sua norma por

$$||\xi||^2_Y = \sum_{j=0}^{m-1} ||\xi_j||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \tag{2.103}$$

onde $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \in Y$. Também, como foi introduzido no Teorema 2.23, X denota o espaço de Hilbert

$$X = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

e sua norma é denotada por

$$||w||^2_X = \sum_{j=0}^{m-1} ||w_j||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.104}$$

onde $w = (w_0, w_1, \dots, w_{m-1}) \in X$. Representa-se por F ao subespaço de Y,

$$F = \left\{\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u);\; u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})\right\}.$$

Em F tem-se a norma induzida por Y, isto é,

$$||\gamma u||^2_F = ||\gamma u||^2_Y = \sum_{j=0}^{m-1} ||\gamma_j u||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \tag{2.105}$$

e a nova norma

$$|||\gamma u|||^2_Y = \sum_{j=0}^{m-1} |||\gamma_j u|||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \,. \tag{2.106}$$

Tem-se o seguinte resultado:

Proposição 2.27. *Existem constantes* $C_1 > 0$ *e* $C_2 > 0$ *independentes de* $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *tais que*

$$C_1 ||\gamma u||_Y^2 \leq |||\gamma u|||_Y^2 \leq C_2 ||\gamma u||_Y^2 \,.$$

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Pelo Lema 2.17 resulta

$$||\gamma_j u||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_j \sum_{\ell=0}^{j} |||\gamma_\ell u|||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Note que

$$|||\gamma_\ell u|||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_\ell |||\gamma_\ell u|||^2_{H^{m-\ell-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

para $0 \leq \ell \leq j$, pois $H^{m-l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ está imerso continuamente em $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Decorre das duas últimas expressões que

$$||\gamma_j u||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_j \sum_{\ell=0}^{j} C_\ell |||\gamma_\ell u|||^2_{H^{m-\ell-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Esta desigualdade acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} ||\gamma_j||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq \sum_{j=0}^{m-1} C_j \sum_{\ell=0}^{j} C_\ell |||\gamma_\ell u|||^2_{H^{m-\ell-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C \sum_{\ell=0}^{m-1} |||\gamma_\ell u|||^2_{H^{m-\ell-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{aligned}$$

isto é,

$$||\gamma u||_Y^2 \leq C \, |||\gamma u|||_Y^2 .$$

Aplicando análogo raciocínio e utilizando a segunda desigualdade do Lema 2.17, obtém-se

$$|||\gamma u|||_Y^2 \leq C \, ||\gamma u||_Y^2 \,.$$

As duas últimas desigualdades mostram a proposição. ■

Define-se a aplicação linear

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to Y, \;\; u \to \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u) \tag{2.107}$$

onde, como foi introduzido anteriormente, $\gamma_j u$ é a restrição a Γ da função $\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Tem-se o seguinte resultado, denominado o teorema de traço para as funções $u \in H^m(\Omega)$.

Teorema 2.24. *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ e m um inteiro, $m \geq 1$. A aplicação γ definida em (2.107) prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda denotada por γ, de $H^m(\Omega)$ sobre $Y = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, cujo núcleo é o espaço $H_0^m(\Omega)$. Tem-se ainda que γ possui uma inversa à direita linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear e contínua Λ de Y em $H^m(\Omega)$ tal que $\gamma(\Lambda\xi) = \xi$ para todo $\xi \in Y$.*

Como na terminologia introduzida logo a seguir do Teorema 2.23, a aplicação γ denomina-se *traço de ordem* $m-1$ e o traço da função, traço de ordem zero.

Por construção a aplicação γ é a única aplicação linear e contínua de $H^m(\Omega)$ em Y tal que $\gamma_j u = \left.\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, para todo $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Demonstração do Teorema 2.24: Far-se-á a demonstração em quatro etapas.

Primeira Etapa: Continuidade de γ. Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Tem-se

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} (\sigma_k u)(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Lembrando a notação (2.90), obtém-se, para cada $k = 1, 2, \ldots, N$:

$$v_k \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}), \quad \frac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, v_k(y', 0) = \frac{\partial^j}{\partial \nu^j}\, (\sigma_k u)(\varphi_k^{-1}(y', 0)), \tag{2.108}$$

para $(y', 0) \in \Sigma_\delta$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Também, do Lema 2.6 do Parágrafo 2.4,

$$||v_k||_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} = ||v_k||_{H^m(Q^+_{\delta\varepsilon})} \leq C||\sigma_k u||_{H^m(\Omega)} \leq C||u||_{H^m(\Omega)} \tag{2.109}$$

e do Teorema 2.23,

$$||\gamma v_k||_X^2 \leq C||v_k||^2_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \tag{2.110}$$

onde

$$\gamma v_k = (\gamma_0 v_k, \gamma_1 v_k, \ldots, \gamma_{m-1} v_k)$$

$$(\gamma_j v_k)(y') = \frac{\partial^j}{\partial y_n^j}\, v_k(y', 0), \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

De (2.109), (2.110) e lembrando a norma (2.104) do espaço X, vem

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{m-1} ||\gamma_j v_k||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C||u||^2_{H^m(\Omega)} \tag{2.111}$$

A Proposição 2.27 nos proporciona

$$||\gamma u||_Y^2 = \sum_{j=0}^{m-1} ||\gamma_j u||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \sum_{j=0}^{m-1} |||\gamma_j u|||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

então, de (2.107) e lembrando a norma (2.105) e a expressão (2.94), obtém-se:

$$||\gamma u||_Y^2 \leq C \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{m-1} ||\gamma_j v_k||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \tag{2.112}$$

As desigualdades (2.111) e (2.112) implicam

$$||\gamma u||_Y^2 \leq C ||u||^2_{H^m(\Omega)}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Segunda Etapa: γ é sobrejetora. Seja $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}) \in (\mathcal{D}(\Gamma))^m$. Tem-se:

$$w_j(x) = \sum_{k=1}^{N} (\sigma_k w_j)(x), \quad \forall\, x \in \Gamma, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Fixa-se k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Define-se para $j = 0, 1, \ldots, m-1$:

$$\zeta_{j,k}(y') = h_k(y', 0) z_k(y', 0) = (\sigma_k w_j)\, (\varphi_k^{-1}(y', 0)),\ y' \in \Sigma_\delta\,. \tag{2.113}$$

Estendendo $\zeta_{j,k}$ por zero fora de Σ_δ vem que $\zeta_{j,k} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$. Portanto

$$\zeta_k = (\zeta_{0,k}, \zeta_{1,k}, \ldots, \zeta_{m-1,k}) \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}))^m.$$

Pelo Teorema 2.23 vem que existe $f_k \in H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$||f_k||_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \leq C ||\zeta_k||_X$$

e

$$\gamma_j f_k = \zeta_{j,k} \quad \text{para} \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Seja $\rho_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que supp ρ_k está contido em $Q_{\delta\varepsilon}$ e $\rho_k = 1$ no suporte de $\sigma_k \circ \varphi_k^{-1}$. Então $\rho_k f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$||\rho_k f_k||_{H^m(Q^+_{\delta\varepsilon})} \leq ||\rho_k f_k||_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \leq C ||f_k||_{H^m(\mathbb{R}^n_+)}$$

e

$$\gamma_j(\rho_k f_k) = \gamma_j(f_k), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Das quatro últimas expressões vem:

$$||\rho_k f_k||_{H^m(Q^+_{\delta\varepsilon})} \leq C||\zeta_k||_X \tag{2.114}$$

e

$$\gamma_j(\rho_k f_k) = \zeta_{j,k} = (\sigma_k w_j) \circ \varphi_k^{-1}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.115}$$

Define-se

$$u_k(x) = (\rho_k f_k)(\varphi_k(x)), \quad x \in \Omega \cap U_k\,.$$

Então estendendo u_k por zero fora de $\Omega \cap U_k$ vem que $u_k \in H^m(\Omega)$, e pelo Lema 2.7 do Parágrafo 2.4

$$||u_k||_{H^m(\Omega)} \leq C||\rho_k f_k||_{H^m(Q^+_{\delta\varepsilon})}$$

que implica de (2.114),

$$||u_k||_{H^m(\Omega)} \leq C||\zeta_k||_X. \tag{2.116}$$

Também, por construção e de (2.115) resulta

$$\gamma_j(u_k \circ \varphi_k^{-1}) = \gamma_j(\rho_k f_k) = (\sigma_k w_j) \circ \varphi_k^{-1}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

isto é,

$$\gamma_j u_k = \sigma_k w_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.117}$$

Tem-se desta igualdade e da Proposição 2.25 que

$$\begin{aligned} ||\zeta_k||_X^2 &= \sum_{j=0}^{m-1} ||\zeta_{j,k}||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{j=0}^{m-1} \left[\gamma_j u_k\right]^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sigma_k w_j\right]^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \sum_{j=0}^{m-1} ||\sigma_k w_j||^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \\ &= C||w||_Y^2\,. \end{aligned}$$

Este resultado e (2.116) acarretam

$$||u_k||^2_{H^m(\Omega)} \leq C||w||^2_Y. \tag{2.118}$$

Define-se

$$u = \sum_{k=1}^{N} u_k\,. \tag{2.119}$$

Então $u \in H^m(\Omega)$. De (2.117) e (2.118) vem

$$||u||_{H^m(\Omega)} \leq C||w||_Y\,, \quad \gamma u = w. \tag{2.120}$$

Mostra-se sem dificuldade que a aplicação $w \mapsto u$ é linear. Destes resultados e da densidade de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ em Y segue que γ é sobrejetora.

Terceira Etapa: Existência de Λ. Seja Λ a aplicação linear definida por

$$\Lambda\colon (\mathcal{D}(\Gamma))^m \to H^m(\Omega), \quad \Lambda w = u$$

onde u está definida por (2.119). Equipa-se a $((\mathcal{D}(\Gamma))^m$ com a topologia induzida por Y, então de (2.120) vem que Λ é contínua. Também de (2.120) resulta $\gamma \Lambda w = w$ para todo $w \in (\mathcal{D}(\Gamma))^m$. A extensão por continuidade de Λ, ainda denotada por Λ, ao espaço Y proporciona a inversa à direita de γ.

Na demonstração da quarta e última etapa do Teorema 2.24 precisa-se do seguinte resultado:

Lema 2.17. *Sejam $u \in H^m(\Omega)$ e $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\gamma_j(\sigma u) = \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} (\gamma_{j-p}\sigma)(\gamma_p u), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, então a aplicação linear

$$H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \to H^s(\mathbb{R}^{n-1}), \;\; u \to \varphi u$$

é contínua (ver Proposição 2.17 do Parágrafo 2.6). Este resultado implica, com $\theta \in \mathcal{D}(\Gamma)$, que a aplicação linear

$$H^s(\Gamma) \to H^s(\Gamma), \;\; \psi \to \theta\psi \tag{2.121}$$

é contínua. Seja (u_μ) uma sucessão de funções de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_\mu \to u \quad \text{em} \quad H^m(\Omega).$$

Então, para $j = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$\sigma u_\mu \to \sigma u \text{ em } H^m(\Omega) \text{ e } \gamma_j(\sigma u_\mu) \to \gamma_j(\sigma u) \text{ em } H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Também, de (2.121),

$$\gamma_j(\sigma u_\mu) = \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} (\gamma_{j-p}\sigma)(\gamma_p u_\mu) \to \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} (\gamma_{j-p}\sigma)(\gamma_p u)$$

em $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. As duas últimas convergências acarretam o lema. $\blacksquare$

Quarta Etapa: $\gamma^{-1}(0)$ **coincide com** $H_0^m(\Omega)$. Claramente $H_0^m(\Omega)$ está contido em $\gamma^{-1}(0)$. Seja $u \in H^m(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = \gamma_1 u = \cdots = \gamma_{m-1} u = 0$. Tem-se:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} (\sigma_k u)(x) \text{ para quase todo } x \in \Omega \text{ e } \sigma_0 u \in H_0^m(\Omega).$$

Fixa-se k com $k = 1, 2, \ldots, N$. Lembrando a notação (2.90) vem que $v_k(y', y_n) = (\sigma_k u)(\varphi_k^{-1}(y', y_n))$ pertence a $H^m(\mathbb{R}_+^n)$. Seja (u_μ) uma sucessão de funções de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_\mu \to u \quad \text{em} \quad H^m(\Omega)$$

então

$$\sigma_k u_\mu \to \sigma_k u \quad \text{em} \quad H^m(\Omega).$$

Esta convergência e o Lema 2.18, acarretam:

$$\gamma(\sigma_k u_\mu) \to \gamma(\sigma_k u) = 0 \quad \text{em} \quad Y. \tag{2.122}$$

Seja $v_{k,\mu} = (\sigma_k u_\mu) \circ \varphi_k^{-1}$. Então o Lema 2.6 do Parágrafo 2.4, implica:

$$v_{k,\mu} \to v_k \quad \text{em} \quad H^m(\mathbb{R}_+^n).$$

Do Teorema 2.23 vem então

$$\gamma(v_{k,\mu}) \to \gamma v_k \quad \text{em} \quad X.$$

Da definição dos espaços $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, da Proposição 2.25 e da convergência (2.122), obtém-se:

$$\gamma(v_{k,\mu}) \to \gamma((\sigma_k u) \circ \varphi_k^{-1}) = 0 \quad \text{em} \quad X.$$

As duas últimas convergências expressam que $\gamma v_k = 0$ em X, portanto, pelo Teorema 2.23, $v_k \in H_0^m(\mathbb{R}_+^n)$, que implica $v_k \in H_0^m(Q_{\delta\varepsilon}^+)$, por conseguinte, pelo Lema 2.7 do Parágrafo 2.4, $\sigma_k u \in H_0^m(\Omega)$, para $k = 1, 2, \ldots, N$. Assim $u \in H_0^m(\Omega)$. $\blacksquare$

Observação 2.24. Da existência da aplicação linear Λ vem que para $\xi \in Y$ as duas normas $||\xi||_Y$ e $|||\xi|||_Y$, definidas por (2.105) e (2.106), respectivamente, estão bem definidas, onde $\Lambda\xi = u$. A Proposição 2.27 mostra que estas duas normas são equivalentes em Y.

Observação 2.25. Decorre da demonstração do Teorema 2.24 que este teorema também é válido quando Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^{m+1}.

Corolário 2.12. *Seja $u \in L^2(\Omega)$, Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^{m+1}, tal que $\tilde{u}$ prolongamento de u ao $\mathbb{R}^n$ nulo fora de Ω, esteja em $H^m(\mathbb{R}^n)$. Então u pertence a $H_0^m(\Omega)$.*

Demonstração: Seja (φ_μ) uma sucessão de funções testes no $\mathbb{R}^n$ convergente para $\tilde{u}$ em $H^m(\mathbb{R}^n)$. Considere um aberto limitado U do $\mathbb{R}^n$, de classe C^{m+1}, tal que

$$U \subset \mathcal{C}\,\overline{\Omega} \quad \text{e} \quad \Gamma = \partial\Omega \subset \partial U = \Sigma.$$

Sem perda de generalidade pode-se supor que $\varphi_\mu(x) = 0$ se $x \in \Sigma \backslash \Gamma$, $\mu = 1, 2, \dots,$. Sendo $(r_\Omega\, \varphi_\mu)$ e $(r_U\, \varphi_\mu)$ sucessões de vetores de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e $\mathcal{D}(\overline{U})$, respectivamente, e $r_\Omega \tilde{u} = u$ e $r_U \tilde{u} = 0$, tem-se as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} r_\Omega\, \varphi_\mu &\to u \quad \text{em} \quad H^m(\Omega) \\ r_U\, \varphi_\mu &\to 0 \quad \text{em} \quad H^m(U) \end{aligned}$$

portanto, pela Observação 2.25, vem:

$$\begin{aligned} \gamma_j(r_\Omega\, \varphi_\mu) &\to \gamma_j u \quad \text{em} \quad H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \gamma_j(r_U\, \varphi_\mu) &\to 0 \qquad \text{em} \quad H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Sigma). \end{aligned}$$

Sendo

$$\gamma_j(r_U\, \varphi_\mu) = \left| \begin{array}{lll} \gamma_j(r_\Omega\, \varphi_\mu) & \text{em} & \Gamma \\ 0 & \text{em} & \Sigma \backslash \Gamma \end{array} \right.$$

conclui-se que $\gamma_j u = 0$ para $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$, logo $u \in H_0^m(\Omega)$. ■

Observação 2.26. O Corolário 2.11 também é verdadeiro no caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, sendo análoga a demonstração. Basta considerar

$$U = \mathbb{R}^n_- = \{(x', x_n); x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n < 0\}.$$

Para concluir a Seção 2.7 enuncia-se o teorema de traço, para as funções $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Para isto introduz-se previamente algumas noções necessárias. Sejam s e p números reais com $s \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Representa-se por $[s]$ ao maior inteiro tal que $[s] \leq s$. Denota-se por $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ ao subespaço de $W^{[s],p}(\mathbb{R}^n)$ constituido pelas funções $u \in W^{[s],p}(\mathbb{R}^n)$ que verificam

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{||x-y||^{n+p(s-[s])}}\, dxdy < \infty, \quad \text{para todo } |\alpha| = [s].$$

Dota-se a esse espaço da norma

$$||u||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \left[||u||^p_{W^{[s],p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{||x-y||^{n+p(s-[s])}} \, dxdy \right]^{1/p}.$$

Com essa norma $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach.

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, Ω de classe $C^{[s]+1}$, cuja fronteira é denotada por Γ. Usando cartas locais de Γ e o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1})$, tal como se fez para a introdução do espaço $H^s(\Gamma)$, define-se o espaço $W^{s,p}(\Gamma)$.

Teorema 2.25. *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^{m+1}, e $1 < p < \infty$ um número real. Então existe uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma \colon W^{m,p}(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma) = Z$$

tal que

$$\gamma u = \left(u|_\Gamma , \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma , \ldots , \left.\frac{\partial^{m-1}}{\partial \nu^{m-1}}\right|_\Gamma \right), \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Além disso, o núcleo de γ é o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$, γ é sobrejetora e existe uma inversa à direita contínua Λ de γ, isto é, existe uma aplicação linear e contínua $\Lambda \colon Z \to W^{m,p}(\Omega)$ tal que $\gamma(\Lambda\xi) = \xi$, para todo $\xi \in Z$.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em J. Necas [26], pag. 104.

2.7 Traço Generalizado da Derivada Normal

Nesta seção considera-se $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^3. Denota-se por $\nu(x)$ à normal unitária exterior em $x \in \Gamma$. Nessas condições é válida a fórmula de Green:

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_\Gamma \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\Gamma \tag{2.123}$$

para todo par de funções $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Aqui

$$C^2(\overline{\Omega}) = \{\varphi|_\Omega \,;\, \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n) \text{ e } \varphi \text{ possui suporte compacto}\}$$

Nesta seção prova-se que tomando u num espaço conveniente, fixado posteriormente, resulta que o traço da derivada normal de u, isto é, o traço de $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ pertence a determinado espaço de Sobolev $H^{-s}(\Gamma)$, $\rho > 0$. Este resultado é fundamental quando se estuda um problema de contorno cujo dado na fronteira é a derivada normal, como o problema de Neumann, ou com círculos unilaterais como o problema de Signorini.

A seguir obtém-se os resultados para $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\cdot$ Considere o espaço vetorial $\mathcal{H}^0(\Omega)$ dado por:

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Definindo em $\mathcal{H}^0(\Omega)$ o produto escalar

$$(u,v)_{\mathcal{H}^0(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}\,, \quad u,v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$$

resulta que ele é um espaço de Hilbert.

Proposição 2.28. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^0(\Omega)$.*

Demonstração: Seja u_0, um vetor de $\mathcal{H}^0(\Omega)$ ortogonal a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, isto é,

$$(u_0,\varphi)_{\mathcal{H}^0(\Omega)} = (u_0,\varphi)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u_0, \Delta \varphi)_{L^2(\Omega)}\,, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \tag{2.124}$$

Deve-se provar que $u_0 = 0$. Para tal, considere $u_1 = \Delta u_0$. As extensões $\tilde{u}_0$ e $\tilde{u}_1$ de u_0 e u_1, respectivamente, nulas fora de Ω, pertencem ao espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. Prova-se primeiro que

$$\tilde{u}_1 \in H^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.125}$$

Para isto, calcula-se $\Delta\tilde{u}_1$ no sentido das distribuições. Tem-se, para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $v = r_\Omega\,\varphi$, restrição de φ a Ω, e levando em consideração (2.124):

$$\begin{aligned}\langle \Delta\tilde{u}_1, \varphi\rangle &= \int_\Omega u_1(x)\Delta\varphi(x)dx = (\Delta u_0, \Delta\bar{v})_{L^2(\Omega)} = \\ &= (u_0,\bar{v})_{\mathcal{H}^0(\Omega)} - (u_0,\bar{v})_{L^2(\Omega)} = \langle -\tilde{u}_0, \varphi\rangle\end{aligned}$$

que acarreta $\Delta\tilde{u}_1 = -\tilde{u}_0$, logo $\Delta\tilde{u}_1$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$, que implica

$$(1 + ||x||^2)\mathcal{F}\tilde{u}_1 = \mathcal{F}(\Delta\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

de onde resulta que $\tilde{u}_1 \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

A seguir prova-se que

$$\Delta\, u_1 = -u_0\,. \tag{2.126}$$

Com efeito, de (2.125) e do Corolário 2.11 do Parágrafo 2.7 vem que $u_1 \in H_0^2(\Omega)$. Este resultado e a Proposição 2.2 da Seção 2.2 do Capítulo 2, acarretam $\widetilde{\Delta u_1} = \Delta \tilde{u}_1$ e como $\Delta \tilde{u}_1 = -\tilde{u}_0$ segue-se (2.126).

Para todo v em $\mathcal{H}^0(\Omega)$ e φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, obtém-se:

$$(\Delta v, \varphi)_{L^2(\Omega)} = (v, \Delta\varphi)_{L^2(\Omega)} \,.$$

Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $H_0^2(\Omega)$, u_1 um vetor deste segundo espaço e observando (2.125), resulta

$$(\Delta v, u_1)_{L^2(\Omega)} = (v, \Delta u_1)_{L^2(\Omega)} = -(v, u_0), \;\; \forall\, v \in \mathcal{H}^0(\Omega).$$

Isto implica

$$(v, u_0)_{\mathcal{H}^0(\Omega)} = (v, u_0)_{L^2(\Omega)} + (\Delta v, u_1)_{L^2(\Omega)} = 0, \;\; \forall\, v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$$

que acarreta $u_0 = 0$. ■

Observação 2.27. Quando considera-se $H^s(\Gamma)$, $s > 0$, como espaço normado real, representa-se por $H^{-s}(\Gamma)$ o dual forte de $H^s(\Gamma)$. No caso complexo, dado $f \in (H^s(\Gamma))'$, dual forte de $H^s(\Gamma)$, define-se o funcional conjugado $\bar{f}$ por $\langle \bar{f}, u\rangle = \overline{\langle f, u\rangle}$ para u em $H^s(\Gamma)$. Neste caso, considera-se como $H^{-s}(\Gamma)$ o espaço vetorial constituido dos $\bar{f}$ tais que $f \in (H^s(\Omega))'$, munido da norma:

$$||\bar{f}||_{H^{-s}(\Gamma)} = \sup\{|\langle f, u\rangle|; ||u||_{H^s(\Gamma)} = 1\}.$$

Note-se que $L^2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-s}(\Gamma)$, $s \geq 0$, sendo a inclusão considerada no sentido seguinte: se $f \in L^2(\Gamma)$, identifica-se f ao funcional $\langle f, u\rangle = (f, u)_{L^2(\Gamma)}$, sendo $u \in H^s(\Gamma)$. Em particular, se $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ então $\gamma_0 u$ e $\gamma_1 u$ podem ser considerados como vetores de $H^{-s}(\Gamma)$, para toda $s \geq 0$.

Teorema 2.26. *A aplicação*

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u), \quad \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$$

prolonga-se por continuidade, a uma aplicação linear e contínua de $\mathcal{H}^0(\Omega)$ em $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$.

Demonstração: Seja γ o traço de ordem dois em Ω. Foi demonstrada, no Teorema 2.24 do Parágrafo 2.7, a existência de uma aplicação linear e contínua

$$\Lambda\colon H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \to H^2(\Omega) \quad \text{tal que} \quad \gamma\Lambda w = w \tag{2.127}$$

para todo $w \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Fixa-se u em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Seja M o funcional definido em $X = H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ por

$$Mw = (\Delta u, \Lambda w)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta\Lambda w)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Representando-se por $C > 0$ a norma de Λ como objeto de $\mathcal{L}(X, H^2(\Omega))$, obtém-se:

$$|Mw| \leq C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)}\,||w||_X\,, \quad \forall\, w \in X.$$

Da fórmula de Green (2.123), verdadeira para todo v em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, e notando que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^2(\Omega)$ e os traços γ_0, γ_1 são contínuos de $H^2(\Gamma)$ em $L^2(\Gamma)$, resulta:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Gamma)} = (\gamma_1 u, \gamma_0 u)_{L^2(\Gamma)} - (\gamma_0 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)}\,, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega). \tag{2.128}$$

Dado $w = (w_0, w_1)$ em X, considere-se $v = \Lambda w$ sendo $\gamma_0 v = w_0$ e $\gamma_1 v = w_1$. Combinando a fórmula de Green anterior e a definição de M, obtém-se a seguinte expressão:

$$Mw = M(w_0, w_1) = \langle \gamma_1 u, w_0 \rangle - \langle \gamma_0 u, w_1 \rangle, \;\; \forall\, w_0 \in H^{3/2}(\Gamma) \text{ e } w_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1).$$

Resulta, portanto,

$$\begin{aligned}
|\langle \gamma_1 u, w_0 \rangle| &= |M(w_0, 0)| \leq C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)}\,||w_0||_{H^{3/2}(\Gamma)} \\
|\langle \gamma_0 u, w_1 \rangle| &= |M(0, w_1)| \leq C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)}\,||w_1||_{H^{1/2}(\Gamma)}\,.
\end{aligned}$$

Daí obtém-se:

$$\begin{aligned}
||\gamma_1 u||_{H^{-3/2}(\Gamma)} &\leq C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)} \\
||\gamma_0 u||_{H^{-1/2}(\Gamma)} &\leq C||u||_{\mathcal{H}^0(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Destas desigualdades e da Proposição 2.28, conclui-se a demonstração do teorema.
■

Corolário 2.13. *(Fórmula de Green). É válida a seguinte fórmula*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)} - \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} \tag{2.129}$$

para toda $u \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ *e* $v \in H^2(\Omega)$.

O corolário é uma conseqüência direta da Proposição 2.28, de (2.128) e do Teorema 2.26.

Note que a dualidade $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)}$, por abuso de notação, também escreve-se:

$$\int_\Gamma \bar{v}\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma$$

embora $\gamma_1 u$ não pertença necessariamente a $L^2(\Gamma)$.

Seja Y o espaço de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ equipado com o produto escalar usual, isto é,

$$(u,v)_Y = (u,v)_{\mathcal{H}^0(\Omega)} + (u,v)_{H^1(\Omega)}\,.$$

Tem-se o seguinte resultado:

Proposição 2.29. *Se $u \in \mathcal{H}^0(\Omega)\cap H^1(\Omega)$, então $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e a aplicação γ_1 é contínua de $\mathcal{H}^0(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ em $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

Demonstração: Observe, inicialmente, que para todo $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H^2(\Omega)$ vale a fórmula de Gauss ou primeira fórmula de Green:

$$(u,\Delta v)_{L^2(\Omega)} = (\gamma_0 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)} - \sum_{i=1}^{n}(D_i u, D_i v)_{L^2(\Omega)}\,. \tag{2.130}$$

Se $u \in Y$ e $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma)$, seja $v = \Lambda(\varphi,0) \in H^2(\Omega)$ onde Λ está definido por (2.127). Então $\gamma_0 v = \varphi$, $\gamma_1 v = 0$ e $||v||_{H^1(\Omega)} \leq C_0||\varphi||_{H^{1/2}(\Gamma)}$. Daí e das fórmulas de Green (2.129) e (2.130), obtém-se:

$$\langle \gamma_1 u, \varphi\rangle = (\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u,\Delta v)_{L^2(\Omega)} = (\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}(D_i u, D_i v)_{L^2(\Omega)}.$$

Resulta, portanto que

$$|\langle \gamma_1 u, \varphi\rangle| \leq ||u||_Y\,||v||_{H^1(\Omega)} \leq 2||u||_Y\,||v||_{H^1(\Omega)} \leq 2C_0||u||_Y\,||\varphi||_{H^{1/2}(\Gamma)}\,.$$

Daí e notando que $H^{3/2}(\Gamma)$ é denso em $H^{1/2}(\Gamma)$ segue a proposição. ∎

Os resultados expostos nesta seção são casos particulares de resultados gerais que serão obtidos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Problemas Elíticos não Homogêneos

Introdução

No presente capítulo será feito um estudo introdutório dos problemas elíticos não homogêneos. Embora limitando-se ao caso do Laplaciano, $-\Delta$, o método é geral podendo ser adaptado a operadores elíticos mais gerais.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^3. Representa-se por γ_0 e γ_1, respectivamente, os traços em $H^m(\Omega)$ da função u e de sua derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$. Note-se que ν é o vetor unitário da normal externa a Γ.

Pretende-se analisar os seguintes problemas de contorno:

$$(P_1) \quad \left| \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \qquad\qquad (P_2) \quad \left| \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h & \text{sobre } \Gamma \end{array} \right.$$

O problema (P_1) denomina-se de Dirichlet e o (P_2) de Neumann.

Inicia-se estudando determinado espaço de Hilbert Y que desempenha papel fundamental no que se segue. Com efeito, define-se

$$Y = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\},$$

munido do produto escalar

$$(u, v)_Y = (u, v) + (\Delta u, \Delta v)_{H^{-1}(\Omega)}\,,$$

com o qual Y é um espaço de Hilbert. Como foi estabelecido nos capítulos anteriores, (u, v), $|u|$ e $((u, v))$, $||u||$ denotarão o produto escalar e norma dos espaços $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente.

No que segue deste capítulo, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ estará denotando o par de dualidade entre o dual F' do espaço F e F. Também, para evitar confusão com a notação $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ do produto escalar de $L^2(\Omega)$, usar-se-á o símbolo $\{f, g\}$ para denotar o par ordenado constituído pelos objetos f e g.

Observação 3.1. Identifica-se, utilizando o Teorema de Riesz-Fréchet, o espaço $L^2(\Omega)$ com seu dual $(L^2(\Omega))'$. Assim:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \approx (L^2(\Omega))'^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Neste contexto, se $f \in L^2(\Omega)$ então $f \in H^{-1}(\Omega)$ e

$$\langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = (f, v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Também, se $f \in H^{-1}(\Omega)$ então

$$\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\,, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A próxima etapa consiste em definir o traço γ_0 para objetos de Y. Segue-se um método análogo ao adotado na Seção 2.8 do Capítulo 2 para se definir o traço de funções de $\mathcal{H}^0(\Omega)$. Consulte-se a notação ali empregada.

Proposição 3.1. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em Y.*

Demonstração: Embora semelhante à feita para o subespaço $\mathcal{H}^0(\Omega)$ de Y, a demonstração será feita com a finalidade de facilitar a leitura deste capítulo. Considere uma forma linear contínua $M\colon Y \to \mathbb{R}$. Se $\langle M, \varphi\rangle = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ implicar $M = 0$, resultará que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em Y, como conseqüência do Teorema de Hahn-Banach. Mostra-se este fato: seja, então, $\widetilde{M}$ a extensão de M ao espaço $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Resulta do Teorema de Riesz-Fréchet que existe $\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle \widetilde{M}, \xi\rangle = (f, \xi_1) + \langle h, \xi_2\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\,,$$

para todo $\{\xi_1, \xi_2\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Em particular, se $u \in Y$ obtém-se:

$$\langle M, u\rangle = (f, u) + \langle h, \Delta u\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\,. \tag{3.1}$$

Sejam $\tilde{f}$, $\tilde{h}$ extensões de f e h nulas no complemento de Ω em relação ao $\mathbb{R}^n$. Da Observação 3.1 resulta para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{f} + \Delta\tilde{h}, \varphi\rangle &= (\tilde{f}, \varphi) + \langle \Delta\tilde{h}, \varphi\rangle = (f, \varphi) + \langle \tilde{h}, \Delta\varphi\rangle = \\ &= (f, \varphi) + (h, \Delta\varphi) = (f, \varphi) + \langle h, \Delta\varphi\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Daí, de (3.1) e da hipótese $\langle M, \varphi \rangle = 0$, obtém-se:

$$\tilde{f} + \Delta\tilde{h} = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

sendo $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ resulta que $\Delta\tilde{h} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $\tilde{h}$ e $\Delta\tilde{h}$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$, portanto, usando a transformada de Fourier, obtém-se que $\tilde{h} \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Sendo Ω de classe C^3 resulta que $h \in H_0^2(\Omega)$. Este resultado acarreta que $\Delta\tilde{h} = \widetilde{\Delta h}$. Assim

$$0 = \tilde{f} + \Delta\tilde{h} = \widetilde{f + \Delta h},$$

portanto

$$f + \Delta h = 0. \tag{3.2}$$

Seja (φ_μ) uma sucessão com $\varphi_\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\varphi_\mu \to h \quad \text{em} \quad H_0^2(\Omega).$$

Para $u \in Y$, resulta da Observação 3.1:

$$\langle \varphi_\mu, \Delta u \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} = \langle \varphi_\mu, \Delta u \rangle_{\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega)} = (\Delta\varphi_\mu, u).$$

Logo, quando $\mu \to \infty$, obtém-se:

$$\langle h, \Delta u \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} = (\Delta h, u).$$

Substituindo em (3.1) e levando em consideração (3.2), resulta:

$$\langle M, u \rangle = (f, u) + (\Delta h, u) = (f + \Delta h, u) = 0$$

para todo $u \in Y$, isto é, $M = 0$. ■

Considere a aplicação T definida por:

$$\{0, w\} \mapsto v, \quad H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Ela é linear e contínua. A continuidade é conseqüência do Teorema do Traço.

Para todo $u \in Y$ e $w \in H^{1/2}(\Gamma)$, considere-se a função numérica Su definida por:

$$\langle Su, w \rangle = (u, \Delta Tw) - \langle \Delta u, Tw \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \,. \tag{3.3}$$

Tem-se que Su é uma forma linear em $H^{1/2}(\Gamma)$ para cada $u \in Y$. Prova-se que Su é contínua. De fato, tem-se:

$$\begin{aligned} &|\langle Su, w \rangle| \leq |u|\, |\Delta Tw| + ||\Delta u||_{H^{-1}(\Omega)}\, ||Tw|| \leq \\ &\leq \left(|u|^2 + ||\Delta u||^2_{H^{-1}(\Omega)} \right)^{1/2} \left(|\Delta Tw|^2 + ||Tw||^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq ||u||_Y\, ||Tw||_{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \leq ||T||\, ||u||_Y\, ||w||_{H^{1/2}(\Gamma)} \,. \end{aligned}$$

Conclui-se que a forma linear Su é contínua em $H^{1/2}(\Gamma)$, logo um objeto de $H^{-1/2}(\Gamma)$. Tem-se, também,

$$||Su||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C||T||\,||u||_Y\,.$$

No que se segue dar-se-á sentido ao traço γ_0 de um objeto de Y. Realmente, seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ sendo $v = Tw \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Devido à Fórmula de Green, resulta:

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle = (u, \Delta v) - (\Delta u, v) \tag{3.4}$$

e γ_0 em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é uma forma linear contínua na norma de Y. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em Y, resulta que a forma linear contínua γ_0 possui uma única extensão, por continuidade, a Y, representada também por γ_0. Diz-se que esta extensão γ_0 é o traço de ordem zero em Y. Sendo $v = Tw$, resulta de (3.4) que:

$$\langle \gamma_0 u, w \rangle = (u, \Delta Tw) - \langle \Delta u, Tw \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}\,,$$

que comparando com (3.3) vem que para todo $u \in Y$ tem-se $\gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$. ■

Um resumo do exposto vem dado no seguinte resultado:

Teorema 3.1. *A aplicação linear*

$$u \in Y \mapsto \gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

é contínua e é válida a fórmula de Green

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle = (u, \Delta v) - \langle \Delta u, v \rangle, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

A seguir estuda-se o Problema (P_1) com diferente escolha de regularidade para os dados f e g.

Observação 3.2. Denote por $\tilde{\gamma}_0$ a aplicação traço dada pelo Teorema 3.1 e por γ_0 a aplicação traço dada pelo Teorema 2.22 do Capítulo 2. Note que $H^1(\Omega)$ está contido em Y. Tem-se que $\tilde{\gamma}_0$ é uma extensão de γ_0, isto é,

$$\tilde{\gamma}_0 u = \gamma_u\,, \quad \forall\, u \in H^1(\Omega).$$

Com efeito, seja $u \in H^1(\Omega)$ então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ e

$$\Big| \langle -\Delta u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \Big| = |((u, v))| \leq ||u||\,||v||,$$

portanto $||\Delta u||_{H^{-1}(\Omega)} \leq ||u||$. Isto acarreta que a injeção de $H^1(\Omega)$ em Y é contínua. Note que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$ e em Y. Logo para $u \in H^1(\Omega)$ existe uma sucessão (φ_μ) de vetores de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\varphi_\mu \to u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega),$$

e como a injeção de $H^1(\Omega)$ em Y é contínua,

$$\varphi_\mu \to u \quad \text{em} \quad Y.$$

Então

$$\gamma_0\varphi_\mu \to \gamma_0 u \text{ em } H^{1/2}(\Gamma) \text{ e } \tilde{\gamma}_0\,\varphi_\mu \to \tilde{\gamma}_0\,u \text{ em } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Como $\gamma_0\,u_\mu = \tilde{\gamma}_0\,\varphi_z\mu$, para todo μ, vem que $\gamma_0 u = \tilde{\gamma}_0 u$, que mostra a afirmação.

3.1 Problema de Dirichlet

Reescreve-se (P_1):

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \left|\begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = g \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array}\right.$$

Considere f e g não regulares. Uma das primeiras dificuldades que aparece no estudo de (P_1) nesse caso é definir uma solução u do problema.

Deduz-se, de forma heurística, uma definição de solução de u de (P_1) quando f e g são não regulares. Claro está que uma das dificuldades é precisar em que espaços devem habitar f e g. Nesta parte é que serão utlizados os resultados obtidos na Introdução.

Formalmente, obtém-se:

$$\int_\Omega (-\Delta u) v\,dx = \int_\Omega u(-\Delta v)\,dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\,v\,d\Gamma + \int_\Gamma u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Gamma.$$

Levando em consideração (P_1), resulta

$$\int_\Omega u(-\Delta v)\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx - \int_\Gamma g\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\,v\,d\Gamma.$$

Como não se tem nenhuma informação sobre $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$ é natural supor que $v|_\Gamma = 0$. Portanto

$$\int_\Omega u(-\Delta v)\,dx = \int_\Omega f v\,dx - \int_\Gamma g\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Gamma \quad \text{com} \quad v|_\Gamma = 0.$$

É natural considerar $u \in L^2(\Omega)$. Com esta hipótese, o primeiro membro da última igualdade só faz sentido se $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Logo, pelas restrições impostas a v vem que v deve pertencer a $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, isto por sua vez acarreta, $\gamma_1 v \in H^{1/2}(\Gamma)$. Portanto, no termo $\displaystyle\int_\Gamma g\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Gamma$ pode-se escolher $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Do exposto vem

$$(u, -\Delta v) = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}\,, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Falta precisar em que espaço deve estar f. Se na última igualdade se tomar $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ resulta

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

isto é, $-\Delta u = f$. Então o Problema (P_1) com $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ terá um sentido, isto é, $\gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$, se por exemplo $f \in H^{-1}(\Omega)$ (cf. Teorema 3.1 da Introdução).

O exposto motiva a seguinte definição: Sejam

$$f \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad g \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Uma função $u \in L^2(\Omega)$ que verifica

$$(u, -\Delta v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \langle g, \gamma_1 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

é denominada uma *solução definida por transposição* do Problema (P_1).

Divide-se o estudo da existência de soluções do Problema (P_1) em três casos, segundo os espaços de Sobolev onde serão tomadas as funções f e g.

Caso I. Suponha-se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Tem-se o seguinte resultado

Proposição 3.2. *Para cada par $\{f, g\}$ pertencente a $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ existe um único $u \in L^2(\Omega)$, solução definida por transposição de (P_1). Tem-se, ainda mais, que a aplicação linear*

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega)$$

é contínua e injetora. Também, u é solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \textit{em} \quad H^{-1}(\Omega) \\ u = g \quad \textit{em} \quad H^{-1/2}(\Gamma) \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Demonstração: A aplicação linear

$$-\Delta\colon H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega) \tag{3.7}$$

é bijetora. Também ela é uma isometria pois $||u||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = |\Delta u|$. (Aqui o espaço de Hilbert $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ é equipado com o produto escalar $(\Delta u, \Delta v)$). Daí, o adjunto $(-\Delta)^*$ de $-\Delta$, definido por:

$$(-\Delta)^*\colon L^2(\Omega) \mapsto (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))' \tag{3.8}$$

$$\langle(-\Delta)^* u, v\rangle = (u, -\Delta v), \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.9}$$

é, igualmente, uma isometria bijetora.

Observe que $(-\Delta)^*$ é uma extensão de $-\Delta$, uma vez que $D(-\Delta) \subset D((-\Delta)^*)$.

Considere L um objeto do dual $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))'$, definido por

$$\langle L, v\rangle = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle, \quad v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.10}$$

sendo γ_1 o traço de ordem um em $H^2(\Omega)$. Resulta de (3.8):

$$\left| \begin{array}{l} \text{Existe um único } u \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ (-\Delta)^* u = L, \ \text{no sentido de } (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))' \end{array} \right.$$

De modo equivalente, tem-se:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Existe um único } u \in L^2(\Omega) \text{ tal que} \\ \langle L, v\rangle = \langle (-\Delta)^* u, v\rangle \text{ para todo } v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{3.11}$$

De (3.9)-(3.11), obtém-se:

$$(u, -\Delta v) = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle \tag{3.12}$$

para todo $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, isto é, u é uma solução definida por transposição do Problema (P_1). A unicidade de u segue notando que a aplicação (3.7) é bijetora.

- Mostra-se que $-\Delta u = f$ em $H^{-1}(\Omega)$.

  De fato, tomando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (3.12) segue a afirmação.
- Verifica-se que $\gamma_0 u = g$ em $H^{-1/2}(\Gamma)$.

  Com efeito, como $u \in L^2(\Omega)$ e $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ vem pelo Teorema 3.1 da Introdução que $\gamma_0 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e é válida a fórmula de Green:

$$\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle = (u, \Delta v) - \langle \Delta u, v\rangle, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado de (3.12) resulta

$$\langle g, \gamma_1 v\rangle = (u, \Delta v) - \langle \Delta u, v\rangle, \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

As duas últimas igualdades acarretam o resultado desejado.

- Continuidade da aplicação

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega)$$

u solução de (P_1) definido por (3.5).

Sejam $h \in L^2(\Omega)$ e v solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v = h \quad \text{em} \quad \Omega \\ v|_\Gamma = 0 \end{array} \right.$$

Então $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e

$$||v||_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} \leq C|h|. \tag{3.13}$$

De (3.12) resulta

$$(u, h) = \langle f, v\rangle - \langle g, \gamma_1 v\rangle.$$

Logo

$$|(u, h)| \leq ||f||_{H^{-1}(\Omega)}\,||v||_{H_0^1(\Omega)} + ||g||_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,||\gamma_1 v||_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Esta desigualdade e (3.13) implicam:

$$|(u, h)| \leq C\left[\,\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right]^{1/2}|h|.$$

Daí vem

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq C\left[\,\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}\right]^{1/2}$$

provando a continuidade da aplicação. ■

Como conseqüência da demonstração acima, obtém-se:

Corolário 3.1. *A aplicação linear*

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto u \in Y,$$

(u *dada pela Proposição* 3.5) *é contínua e bijetiva.*

Da unicidade de soluções definidas por transposição de (P_1) vem que os Problemas (3.5) e (3.6) são equivalentes.

Caso II Considere-se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Denomina-se solução de (P_1), neste caso, a uma função $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\left|\begin{array}{l} ((u, v)) = \langle f, v\rangle \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega) \\ \gamma_0 u = g \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma) \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Demonstra-se, a seguir, existência, unicidade e dependência contínua, como foi feito no Caso I.

De fato, considere a função

$$T\colon H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega),$$

tal que $Tg = w$ sendo $\gamma_0 w = g$, γ_0 o traço em $H^1(\Omega)$. Daí resulta que o problema variacional

$$\left| \begin{array}{l} z \in H_0^1(\Omega) \\ ((z,v)) = \langle f, v\rangle - ((w,v)) \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{3.15}$$

é bem posto no sentido de Hadamard. Portanto $u = z + w$ pertencente a $H^1(\Omega)$ é solução do Problema (3.14). Também

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega) \\ \gamma_0 u = g \quad \text{em} \quad H^{1/2}(\Gamma). \end{array} \right.$$

A unicidade segue de forma usual.

Resta provar a dependência contínua. Realmente, considere as sucessões (f_μ) e (g_μ) de $H^{-1}(\Omega)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$, respectivamente, convergentes nos respectivos espaços para f e g. Tem-se $Tg_\mu = w_\mu \to Tg$ em $H^1(\Omega)$. Seja z_μ a solução de (3.15) correspondente ao par $\{f_\mu, g_\mu\}$. Então para $\mu, \tau \in \mathbb{N}$, obtém-se:

$$((z_\mu - z_\tau, v)) = \langle f_\mu - f_\tau, v\rangle - ((w_\mu - w_\tau, v)), \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Considerando-se $v = z_\mu - z_\tau$ em $H_0^1(\Omega)$, segue:

$$\begin{aligned} ||z_\mu - z_\tau||^2_{H_0^1(\Omega)} \quad &\leq ||f_\mu - f_\tau||_{H^{-1}(\Omega)} \, ||z_\mu - z_\tau||_{H_0^1(\Omega)} + \\ &+ ||w_\mu - w_\tau||_{H^1(\Omega)} \, ||z_\mu - z_\tau||_{H_0^1(\Omega)} \, . \end{aligned}$$

Daí resulta que (z_μ) é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Logo converge para $z \in H_0^1(\Omega)$ e

$$((z,v)) = \langle f, v\rangle - ((w,v)) \quad \text{para cada} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $u_\mu = z_\mu + w_\mu \to u = z + w$ em $H^1(\Omega)$, provando-se que a aplicação linear

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \to u \in H^1(\Omega),$$

sendo u solução de (3.14), é contínua. ■

Do exposto no Caso II, obtém-se:

Proposição 3.3. *A aplicação linear*

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \mapsto u \in H^1(\Omega)$$

u solução de (3.14), *é contínua e bijetora. Também u é solução do problema:*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \textit{em} \quad H^{-1}(\Omega) \\ \gamma_0 u = g \quad \textit{em} \quad H^{1/2}(\Gamma) \end{array} \right.$$

Caso III Neste caso examina-se a solução de (P_1) quando $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^\alpha(\Gamma)$, sendo $-\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{1}{2}$. O método consiste em aplicar resultados de interpolação de espaços de Sobolev (cf. J.L. Lions - E. Magenes [20]) aos espaços obtidos nas Proposições 3.2 e 3.3.

Considere então as aplicações lineares bijetoras

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega)$$
$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \mapsto u \in H^1(\Omega)$$

onde u é solução de (P_1). Tem-se, por interpolação de espaços:

$$\left[H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)\right]_\theta = H^{(1-\theta)\frac{1}{2}+\theta(-\frac{1}{2})}(\Gamma) = H^{(1/2)-\theta}(\Gamma),\ 0 \le \theta \le 1.$$

Fazendo-se $\dfrac{1}{2} - \theta = \alpha$, obtém-se $-\dfrac{1}{2} \le \alpha \le \dfrac{1}{2}$. De forma análoga

$$\left[H^1(\Omega), L^2(\Omega)\right]_\theta = H^{1-\theta}(\Omega) = H^{(1/2)+\alpha}(\Omega)$$

Note que $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$.

Como conseqüência do exposto vem que a aplicação linear

$$\{f, g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^\alpha(\Gamma) \mapsto u \in H^{(1/2)+\alpha}(\Omega), \quad -\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}, \tag{3.16}$$

é contínua e injetora, sendo u a única solução do problema

$$\left|\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= g \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{aligned}\right.$$

Análise da Aplicação Traço γ_0

Por interpolação de espaços resulta:

$$\left[H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma),\ H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)\right]_{(1/2)-\alpha} = H^{-1}(\Omega) \times H^\alpha(\Gamma),\ -\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}$$

e

$$\left[H^1(\Omega), Y\right]_{(1/2)-\alpha} = Y_\alpha\,, \qquad -\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}$$

onde

$$Y_\alpha = \left\{u \in H^{(1/2)+\alpha}(\Omega);\ \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\right\},$$

com produto escalar

$$(u,v)_{Y_\alpha} = (u,v)_{H^{1/2+\alpha}(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{H^{-1}(\Omega)} \,.$$

Destes dois resultados de interpolação e aplicando o Teorema do Gráfico Fechado à aplicação inversa de (3.16) ((3.16) com $u \in Y_\alpha$), vem que a aplicação traço γ_0:

$$u \in Y_\alpha \mapsto \gamma_0 u \in H^\alpha(\Gamma), \qquad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

é contínua.

Do Caso III, obtém-se:

Teorema 3.2. *A aplicação linear*

$$\{f,g\} \in H^{-1}(\Omega) \times H^\alpha(\Gamma) \mapsto u \in Y_\alpha \,, \qquad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

onde u é solução do problema

$$\left| \begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \textit{em} \quad \Omega \\ u &= g \quad \textit{sobre} \quad \Gamma, \end{aligned} \right. \tag{3.17}$$

é contínua e bijetora. A aplicação linear, traço γ_0:

$$u \in Y_\alpha \mapsto \gamma_0 u \in H^\alpha(\Gamma), \qquad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

é contínua.

Corolário 3.2. *Em Y_α, $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, os produtos escalares*

$$(u,v)_{Y_\alpha} = (u,v)_{H^{1/2+\alpha}(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{H^{-1}(\Omega)}$$

e

$$((u,v))_{Y_\alpha} = (\gamma_0 u, \gamma_0 v)_{H^\alpha(\Gamma)} + (\Delta u, \Delta v)_{H^{-1}(\Omega)}$$

proporcionam normas equivalentes.

Demonstração: Da continuidade da primeira aplicação do Teorema 3.2, obtém-se:

$$\|u\|^2_{Y_\alpha} \leq C \left[\|\Delta u\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|\gamma_0 u\|^2_{H^\alpha(\Gamma)} \right] = C\,((u,u))_{Y_\alpha} = |||u|||^2_{Y_\alpha} \,.$$

Também, da continuidade do traço γ_0 dado pelo Teorema 3.2, resulta

$$\|\gamma_0 u\|^2_{H^\alpha(\Gamma)} \leq C\left[\|u\|^2_{H^{1/2+\alpha}(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right] = \|u\|^2_{Y_\alpha}$$

portanto

$$|||u|||^2_{Y_\alpha} \leq (C+1)\,\|u\|^2_{Y_\alpha}\,.$$

Aqui $C > 0$ denota uma constante genérica independente de $u \in Y_\alpha$. A primeira e terceira desigualdade acarretam o corolário. ■

Observação 3.3. Note que $\mathcal{D}(\Omega)$ não é denso em Y. Com efeito, se $\mathcal{D}(\Omega)$ fosse denso em Y, para cada $u \in Y$ com $\gamma_0 u \neq 0$, existiria uma sucessão (φ_μ) de vetores de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\varphi_\mu \to u \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \Delta\varphi_\mu \to \Delta u \text{ em } H^{-1}(\Omega)$$

que acarretaria ser (φ_μ) uma sucessão de Cauchy em $H^1_0(\Omega)$ pois Δ é uma isometria de $H^1_0(\Omega)$ sobre $H^{-1}(\Omega)$. Portanto ter-se-ia $u \in H^1_0(\Omega)$, que implicaria $\gamma_0 u = 0$, o qual não pode acontecer. Análogo raciocínio, aplica-se para mostrar que $\mathcal{D}(\Omega)$ não é denso em $Y_0 = \{u \in H^{1/2}(\Omega); \Delta u \in H^{-1}(\Omega)\}$. Observe que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^{1/2}(\Omega)$, cf. J.L. Lions - E. Magenes [20].

Caso IV Analisa-se, no presente caso, o problema (P_1) quando $f \in L^2(\Omega)$. As conclusões, aqui obtidas, serão utilizadas no estudo do Teorema de Traço e da Fórmula de Green da Seção 3.4.

Do resultado de regularidade de soluções de problemas elíticos, cf. H. Brezis [3], resulta que se v for solução do problema:

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta v = f \quad \text{em} \quad \Omega, \;\; f \in L^2(\Omega) \\ \quad\;\; v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array}\right.$$

então $v \in H^2(\Omega)$ e $||v||_{H^2(\Omega)} \leq C|f|$, sendo $C > 0$ uma constante independente de f. Isto acarreta, como feito no Caso II, que a aplicação linear

$$\{f, g\} \in L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma) \mapsto u \in H^2(\Omega),$$

u solução do problema:

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ \;\gamma_0 u = g, \end{array}\right.$$

é contínua e bijetora. Observe-se que para $0 \leq \theta \leq 1$, tem-se:

$$\left[H^{3/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)\right]_\theta = H^{(3/2)-2\theta}(\Gamma) \tag{3.18}$$

e

$$\left[H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right]_\theta = H^{2(1-\theta)}(\Omega). \tag{3.19}$$

Considere o espaço $\mathcal{H}^0$, (cf. Capítulo 2, Seção 2.8),

$$\mathcal{H}^0 = \{u \in L^2(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

com a estrutura Hilbertiana:

$$(u, v)_{\mathcal{H}^0} = (u, v) + (\Delta u, \Delta v).$$

Resulta, portanto, de (3.18), (3.19) e para $0 \leq \theta \leq 1$:

$$\left[L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma),\ L^2(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)\right]_\theta = L^2(\Omega) \times H^{(3/2)-2\theta}(\Gamma)$$

e

$$\left[H^2(\Omega), \mathcal{H}^0\right]_\theta = \mathcal{H}^{2(1-\theta)}.$$

Observe que $\mathcal{H}^\alpha$, $\ 0 \leq \alpha \leq 2$, é o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}^\alpha = \{u \in H^\alpha(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\} \tag{3.20}$$

munido do produto escalar

$$(u, v)_{\mathcal{H}^\alpha} = (u, v)_{H^\alpha(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v).$$

Considere $\alpha = 2(1-\theta)$. Então $\dfrac{3}{2} - 2\theta = -\dfrac{1}{2} + \alpha$.

Obtém-se, do exposto e por aplicação de argumentos análogos aos empregados no Caso III:

Teorema 3.3. *A aplicação linear*

$$\{f, g\} \in L^2(\Omega) \times H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma) \mapsto u \in \mathcal{H}^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2,$$

onde u é a solução do problema

$$\left|\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \textit{em} \quad \Omega, \\ u &= g \quad \textit{sobre} \quad \Gamma, \end{aligned}\right.$$

é contínua e bijetora. Além disso, a aplicação linear, traço γ_0 :

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \mapsto \gamma_0 u \in H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma), \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \tag{3.21}$$

é contínua. ■

Da mesma forma, como o Teorema 3.2 implica o Corolário 3.2, o Teorema 3.3 proporciona o seguinte resultado:

Corolário 3.3. *Em $\mathcal{H}^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$, os produtos escalares*

$$(u,v)_{\mathcal{H}^\alpha} = (u,v)_{H^\alpha(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)$$

e

$$((u,v))_{\mathcal{H}^\alpha} = (\gamma_0 u, \gamma_0 v)_{H^{-\frac{1}{2}+\alpha}(\Gamma)} + (\Delta u, \Delta v)$$

fornecem normas equivalentes.

3.2 Problema de Neumann

No presente parágrafo investiga-se a solução do problema

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \left| \begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= h \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{aligned} \right.$$

sendo f e h funções reais definidas, respectivamente, em Ω e sobre Γ.

De início, como foi feito no Problema de Dirichlet, vai-se definir solução de (P_2) quando f e h são funções não regulares.

Procede-se de forma heurística. Formalmente, obtém-se:

$$\int_\Omega (-\Delta u + u) v \, dx = \int_\Omega u(-\Delta v + v) \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\Gamma + \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\Gamma.$$

Como não se tem informação sobre u restrito a Γ deve-se impor a condição $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$. Supondo $u \in L^2(\Omega)$ vem que $-\Delta v + v$ deve pertencer a $L^2(\Omega)$. Isto e a primeira restrição implicam que v deve pertencer ao espaço

$$W = \{v \in H^2(\Omega);\ \gamma_1 v = 0\} \tag{3.22}$$

que por sua vez acarreta $v \in H^{3/2}(\Gamma)$, portanto pode-se considerar $h \in H^{-3/2}(\Gamma)$. Também considere $f \in L^2(\Omega)$.

O anterior motiva a seguinte definição: Sejam

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad h \in H^{-3/2}(\Gamma).$$

Então $u \in L^2(\Omega)$ que verifica

$$(u, -\Delta v + v) = (f, v) + \langle h, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{3/2}(\Gamma)} \tag{3.23}$$

para todo $v \in W$, é denominada *solução definida por transposição* do Problema (P_2).

Proposição 3.4. *Sejam*

$$f \in L^2(\Omega) \quad e \quad h \in H^{-3/2}(\Gamma).$$

Então o Problema (P_2) possui uma única solução $u \in L^2(\Omega)$ definida por transposição. Além disso, a aplicação linear

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma) \mapsto u \in L^2(\Omega)$$

onde u é solução do problema

$$\left| \begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad em \quad L^2(\Omega) \\ \gamma_1 u &= h \quad em \quad H^{-3/2}(\Gamma), \end{aligned} \right. \tag{3.24}$$

é contínua.

Demonstração: Seja A o operador definido pela terna $\{H^1(\Omega), L^2(\Omega), (u,v)_{H^1(\Omega)}\}$. Então $A = -\Delta + I$ e como Ω é de classe C^3, vem que

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega);\ \gamma_1 u = 0\} = W$$

onde W foi definido por (3.22) (cf. M. Milla Miranda [25]). Também, para cada $f \in L^2(\Omega)$, o problema de Neumann

$$\left| \begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{aligned} \right.$$

admite uma única solução $u \in D(A)$, sendo

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,|f|\,, \tag{3.25}$$

C uma constante independente de f e u (cf. H. Brezis [3]). O espaço vetorial $D(A)$ com o produto escalar

$$(u, v)_{D(A)} = (-\Delta u + u,\ -\Delta v + v)$$

é um espaço de Hilbert.

Do exposto vem

$$A\colon D(A) \longrightarrow L^2(\Omega) \tag{3.26}$$

é uma isometria linear sobrejetora. Resulta então que o adjunto

$$A^*\colon L^2(\Omega) \longrightarrow D(A)'$$

é uma isometria sobrejetora, sendo:

$$\langle(-\Delta + I)^*\, u, v\rangle_{D(A)'\times D(A)} = (u, -\Delta v + v). \tag{3.27}$$

Define-se em $D(A)$ a forma linear L dada por:

$$\langle L, v\rangle = (f, v) + \langle h, \gamma_0 v\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)}\,, \quad v \in D(A). \tag{3.28}$$

Tem-se:

$$|\langle L, v\rangle| \leq |f|\,|v| + ||h||_{H^{-3/2}(\Gamma)}\,||\gamma_0 v||_{H^{3/2}(\Gamma)}$$

que implica de (3.25),

$$|\langle L, v\rangle| \leq C\left[|f|^2 + ||h||^2_{H^{-3/2}(\Gamma)}\right]^{1/2} ||v||_{D(A)}$$

provando a continuidade de L em $D(A)$, portanto L é um objeto de $D(A)'$.

Decorre, daí e por ser A^* sobrejetora, que existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(-\Delta + I)^*\, u = L \quad \text{em} \quad D(A)'$$

ou

$$\langle(-\Delta + I)^*\, u, v\rangle = \langle L, v\rangle, \quad \forall\, v \in D(A). \tag{3.29}$$

Combinando (3.27)-(3.29) vem que

$$(u, -\Delta v + v) = (f, v) + \langle h, \gamma_0 v\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)}\,, \quad \forall\, v \in D(A) \tag{3.30}$$

isto é, u é uma solução definida por transposição de (P_2). A unicidade de u é conseqüência da aplicação A dada em (3.26) ser bijetora.

- Mostra-se que $-\Delta u + u = f$ em $L^2(\Omega)$.

  Com efeito, considerando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ obtém-se o resultado.
- Mostra-se que $\gamma_1 u = h$ em $H^{-3/2}(\Gamma)$.

  De fato, considera-se o espaço $\mathcal{H}^0$, (cf. Capítulo 2, Seção 2.8). Resulta dos resultados aí obtidos, que a aplicação traço γ

$$u \in \mathcal{H}^0 \longmapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\} \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$$

é linear e contínua e vale a seguinte fórmula de Green:

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)} + \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}$$

para todo $v \in H^2(\Omega)$ e $u \in \mathcal{H}^0$.

Como $u \in \mathcal{H}^0$ vem então que $\gamma_1 u \in H^{-3/2}(\Gamma)$ e

$$(-\Delta u + u, v) = (u, -\Delta v + v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)}$$

para todo $v \in D(A)$, ou

$$(f, v) = (u, -\Delta v + v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)}\,, \quad \forall\, v \in D(A).$$

Desta igualdade e de (3.30) vem o resultado desejado.

- Continuidade da aplicação linear

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma) \longmapsto u \in L^2(\Omega)$$

onde u é solução de (3.24).

De fato, seja $\xi \in L^2(\Omega)$ e v solução de (3.24) com ξ em lugar de f e $h = 0$. Da condição (3.30) resulta

$$(u, \xi) = (f, v) + \langle h, \gamma_0 v \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)}$$

Da estimativa (3.25) obtém-se $||v||_{H^2(\Omega)} \leq C|\xi|$, portanto

$$\begin{aligned} |(u, \xi)| &\leq C||\{f, h\}||_{L^2(\Omega)\times H^{-3/2}(\Gamma)}\, ||v||_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C||\{f, h\}||_{L^2(\Omega)\times H^{-3/2}(\Gamma)}\, |\xi| \end{aligned}$$

o que implica

$$|u| \leq C||\{f, h\}||_{L^2(\Omega)\times H^{-3/2}(\Gamma)}$$

mostrando a continuidade da aplicação. ■

Nota-se que pela unicidade das soluções definidas por transposição do Problema (P_2), os problemas (3.23) e (3.24) são equivalentes.

Do exposto, obtém-se:

Corolário 3.4. *Tem-se que a aplicação linear*

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{-3/2}(\Gamma) \longmapsto u \in \mathcal{H}^0$$

onde u é a solução de (3.24)*, é contínua e bijetora.*

Teorema 3.4. *A aplicação linear*

$$u \in \mathcal{H}^0 \mapsto \gamma_1 u \in H^{-3/2}(\Gamma)$$

é contínua.

Observação 3.4. Denote por $\tilde{\gamma}_1$ e γ_1 as aplicações lineares obtidas nos Teoremas 3.4 e 2.24, respectivamente. Tal como na Observação 3.2 obtém-se que $\tilde{\gamma}_1$ é uma extensão de γ_1 . A demonstração deste fato segue como na Observação 3.2, notando que $H^2(\Omega)$ está imerso continuamente em $\mathcal{H}^0$ e que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^2(\Omega)$ e em $\mathcal{H}^0$ (cf. Seção 2.8 do Capítulo 2).

Considere-se, agora, $f \in L^2(\Omega)$ e $h \in H^{1/2}(\Gamma)$. Seja $w \in H^2(\Omega)$ tal que $\gamma_1 u = h$. Então, do Teorema de Traço (cf. Capítulo 2, Seção 2.8), resulta que w pode ser escolhido de modo que

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\, \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \,. \tag{3.31}$$

Para este w, seja v a solução do problema:

$$\left| \begin{aligned} -\Delta v + v = f + \Delta w - w \quad &\text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad &\text{sobre} \quad \Gamma. \end{aligned} \right.$$

Resulta que para esta escolha de w, a solução v pertence a $H^2(\Omega)$. De (3.25) e (3.31), obtém-se:

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C\big[\, |f| + |\Delta w| + |w|\,\big] \leq C\big(\, |f| + \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,\big).$$

Tomando-se $u = v + w$, resulta:

$$\left| \begin{aligned} -\Delta u + u = f \quad &\text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad &\text{sobre} \quad \Gamma, \end{aligned} \right. \tag{3.32}$$

De (3.31) e da última desigualdade segue que

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C\big(\, |f| + \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,\big).$$

Tem-se que a solução u é única.

Conclui-se, portanto, que a aplicação linear

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \longmapsto u \in H^2(\Omega), \tag{3.33}$$

sendo u solução de (3.32), é contínua e bijetora. ∎

No que se segue, serão aplicados resultados de interpolação para a obtenção da solução do problema de Neumann em outros espaços de Sobolev (cf. J.L. Lions - E. Magenes, [20]).

De fato, para $0 \leq \theta \leq 1$, obtém-se:

$$\left[H^{1/2}(\Gamma), H^{-3/2}(\Gamma)\right]_\theta = H^{(1/2)-2\theta}(\Gamma)$$

e

$$\left[H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right]_\theta = H^{2(1-\theta)}(\Omega).$$

Seja $\alpha = 2(1-\theta)$ então $\dfrac{1}{2} - 2\theta = -\dfrac{3}{2} + \alpha$. Resulta então da Proposição 3.4 de (3.33) que a aplicação linear

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma) \longmapsto u \in H^\alpha(\Omega), \quad 0 \leq \alpha \leq 2$$

é contínua, sendo u a única solução do problema:

$$\left|\begin{aligned} -\Delta u + u = f \quad & \text{em} \quad \Omega \\ \gamma_1 u = h \quad & \text{sobre} \quad \Gamma. \end{aligned}\right.$$

Do exposto, obtém-se:

Teorema 3.5. *A aplicação linear*

$$\{f, h\} \in L^2(\Omega) \times H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma) \mapsto u \in \mathcal{H}^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2$$

onde u é a solução do Problema (3.31), é contínua e bijetora. Portanto a aplicação linear, traço γ_1:

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \mapsto \gamma_1 u \in H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma), \quad 0 \leq \alpha \leq 2$$

é contínua.

O espaço $\mathcal{H}^\alpha$ foi definido em (3.20). A primeira parte da proposição é conseqüência do Corolário 3.2, de (3.33) e dos resultados de interpolação desenvolvidos. A segunda parte é resultado da primeira parte e do Teorema do Gráfico Fechado.

Do Teorema 3.5 obtém-se o seguinte resultado:

Corolário 3.5. *Em $\mathcal{H}^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$, os produtos escalares*

$$(u, v)_{\mathcal{H}^\alpha} = (u, v)_{H^\alpha(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)$$

e

$$((u, v))_{\mathcal{H}^\alpha} = (\gamma_1 u, \gamma_1 v)_{H^{-\frac{3}{2}+\alpha}(\Gamma)} + (\Delta u, \Delta v)$$

proporcionam normas equivalentes.

A demonstração do Corolário acima segue como no Corolário 3.3.

3.3 Teorema de Traço. Fórmula de Green

A notação deste parágrafo será a que foi fixada no parágrafo anterior. Verifique as notações $\mathcal{H}^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$, γ_0 e γ_1.

Teorema 3.6. *A aplicação traço*

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \longmapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\} \in H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma) \times H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma), \tag{3.34}$$

para $0 \leq \alpha \leq 2$, *é linear e contínua. Tem-se a seguinte Fórmula de Green:*

$$\begin{aligned}(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma)\times H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)} + \\ + \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle_{H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma)\times H^{(1/2)-\alpha}(\Gamma)},\end{aligned} \tag{3.35}$$

para $0 \leq \alpha \leq 2$, $u \in \mathcal{H}^\alpha$ *e* $v \in \mathcal{H}^{2-\alpha}$.

Demonstração: A parte (3.21) do Teorema 3.3 diz que a aplicação linear γ_0,

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \mapsto \gamma_0 u \in H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma), \quad 0 \leq \alpha \leq 2$$

é contínua. E a segunda parte do Teorema 3.5 expressa que a aplicação linear γ_1,

$$u \in \mathcal{H}^\alpha \mapsto \gamma_1 u \in H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma), \quad 0 \leq \alpha \leq 2$$

também é contínua. Resulta então que a aplicação traço $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, dada em (3.34) é linear e contínua.

Trocando α por $2-\alpha$ em (3.34) vem que a aplicação traço $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$,

$$v \in \mathcal{H}^{2-\alpha} \mapsto \gamma v = \{\gamma_0 v, \gamma_1 v\} \in H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma) \times H^{(1/2)-\alpha}(\Gamma)$$

com $0 \leq \alpha \leq 2$, é contínua.

Considere-se u e v em $H^2(\Omega)$. Obtém-se:

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) - (\gamma_1 u, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} + (\gamma_0 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)}\,. \tag{3.36}$$

Note-se que:

$$(\gamma_1 u, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{(-3/2)+\alpha}(\Gamma)\times H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)}$$

e

$$(\gamma_0 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)} = \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle_{H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma)\times H^{(1/2)-\alpha}(\Gamma)}.$$

Portanto, modifica-se (3.36), obtendo-se:

$$\begin{aligned}(-\Delta u, v) \ &= (u, -\Delta v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{-(3/2)+\alpha}(\Gamma)\times H^{(3/2)-\alpha}(\Gamma)} + \\ &+\langle \gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle_{H^{(-1/2)+\alpha}(\Gamma)\times H^{(1/2)-\alpha}(\Gamma)}\,, \quad u, v \in H^2(\Omega).\end{aligned} \tag{3.37}$$

Observe, também, que $[H^2(\Omega), \mathcal{H}^0]_{1-(\alpha/2)} = \mathcal{H}^\alpha$, com $0 \leq \alpha \leq 2$, implicando que $H^2(\Omega)$ é denso em $\mathcal{H}^\alpha$. Desta densidade e da continuidade de γ definida em (3.34), resulta que a igualdade (3.37) é válida para todo $u \in \mathcal{H}^\alpha$ e $v \in H^2(\Omega)$. Aplicando, novamente, o mesmo raciocínio ao resultado obtido e notando que $[H^1(\Omega), \mathcal{H}^0]_{\alpha/2} = \mathcal{H}^{2-\alpha}$, $0 \leq \dfrac{\alpha}{2} \leq 1$, conclui-se que (3.37) é válida para todo $u \in \mathcal{H}^\alpha$ e $v \in \mathcal{H}^{2-\alpha}$, que é a Fórmula de Green procurada. ■

Considere-se o operador A definido no Parágrafo 3.3, Problema de Neumann, isto é, $A = -\Delta + I$ com domínio

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega); \gamma_1 u = 0\}.$$

Sejam (w_μ) e (λ_μ) os vetores próprios e valores próprios, respectivamente, de A. Note-se que $\lambda_\mu \geq 1$ para todo $\mu \in \mathbb{N}$. Tem-se, para $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$D((-\Delta)^\alpha) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \sum_{\mu=1}^{\infty} (\lambda_\mu - 1)^{2\alpha} \left|(u, w_\mu)\right|^2 < \infty \right\}$$

e

$$(-\Delta)^\alpha u = \sum_{\mu=1}^{\infty} (\lambda_\mu - 1)^\alpha (u, w_\mu) w_\mu$$

(cf. M. Milla Miranda [25]). É claro que $D((-\Delta)^\alpha) = D(A^\alpha),\ 0 \leq \alpha \leq 1$.

Proposição 3.5. *Tem-se:*

$$(-\Delta u, v) = \left((-\Delta)^\alpha u, (-\Delta)^{1-\alpha} v\right) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{(-3/2)+2\alpha}(\Gamma) \times H^{(3/2)-2\alpha}(\Gamma)}, \qquad (3.38)$$

para $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ *e* $u \in \mathcal{H}^{2\alpha}$, $\ v \in D(A)$. *Para* $\alpha = \dfrac{1}{2}$, *vale a fórmula:*

$$(-\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\, H^{1/2}(\Gamma)}, \qquad (3.39)$$

sendo $u \in \mathcal{H}^1$ *e* $v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $\mathcal{H}^{2\alpha}$ e $v \in D(A)$. Então da Fórmula de Green (3.35), obtém-se:

$$(-\Delta u, v) = (u, -\Delta v) = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-(3/2)+2\alpha}(\Gamma) \times H^{(3/2)-2\alpha}(\Gamma)}.$$

Por ser $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ vem que $D(A) \subset D(A^{1-\alpha})$. Também $\mathcal{H}^{2\alpha} \subset H^{2\alpha}(\Omega) = D(A^\alpha)$. Sendo $D(A^\alpha) = D((-\Delta)^\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, resulta então que a última igualdade pode ser escrita na forma (3.38). A expressão (3.39) é obtida escrevendo (3.38) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e observando que $D(A)$ está imerso continuamente e densamente em $D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$. Note que a igualdade $H^{2\alpha}(\Omega) = D(A^\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$, é conseqüência dos fatos:

$$\big[H^1(\Omega), L^2(\Omega)\big]_{1-2\alpha} = H^{1-(1-2\alpha)}(\Omega) = H^{2\alpha}(\Omega)$$

e

$$\big[H^1(\Omega), L^2(\Omega)\big]_{1-2\alpha} = D\left(A^{\frac{1-(1-\alpha)}{2}}\right) = D(A^\alpha). \quad \blacksquare$$

Observação 3.5. Decorre da observação 2.25 do Capítulo 2 que todos os resultados do Capítulo 3 são válidos se Ω for um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^3.

Bibliografia

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] J.A. Aubin, *Approximation of Elliptic Boundary Value Problems*, Wiley Interscience, New York, 1972.

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1973.

[4] F.E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators*, I. Math. Annalen 142 (1961), p. 22-130.

[5] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[6] G. Chavant, *Analyse Fonctionelle et Discrétisation*, INRIA, Paris, 1977.

[7] R. Dautray e J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 3, Springer Verlag, 1983.

[8] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc, New York, 1969.

[9] E. Gagliardo, *Proprietà di alcuni classi di funzioni in più variabili*, Richerche di Mat. 7 (1958), p. 102-137.

[10] D. Huet, *Distributions and Sobolev Spaces. An Elementary Introduction and a Few Applications*, Department of Mathematics, University of Maryland, 1970.

[11] S. Kesavan, *Topic in Functional Analysis and Applications*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1989.

[12] V.K. Khoan, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, Tome II, Vuibert, Paris, 1972.

[13] J.-L. Lions, *Problèmes aux Limites dans les Équations aux Dérivées Partielles*, Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal, 1965. Reimpresso em *Oeuvres Choisies* de Jacques-Louis Lions, Vol. I, EDP Sciences Ed., Paris (2002), p. 431-576.

[14] J.-L. Lions, *Équations aux Dérivées Partielles et Calcul des Variations*, Cours IHP, Paris, 1967.

[15] J.-L. Lions, *Cours d'Analyse Numérique*, Hermann, Paris, 1974.

[16] J.-L. Lions, *Controle des Systèmes Distribués Singulier*, INRIA, (1983), p. 213-217, Paris, France (Caso linear).

[17] J.-L. Lions, *Hidden regularity in some non linear hyperbolic equations*, Mat. App. e Comp. Vol. 1 (1987), p. 7-15. Reimpresso em *Oeuvres Choisies* de Jacques-Louis Lions, Vol. III, (2002) p. 265-271, EDP Sciences Ed., Paris, France.

[18] J.-L.Lions, *Exact Controllability, stabilizations and perturbation for distributed systems*, SIAM Rev. 30 (1988), 1–68.

[19] J.-L. Lions, *Contrôllabilité exact, perturbation et stabilization de systèmes distribuées*, Tome I - Contrôllabilité exact - Masson RMAB, Paris, 1988.

[20] J.-L. Lions e E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[21] L.A. Medeiros, *The initial value problem for nonlinear wave equations in Hilbert spaces*, Trans. AMS, 36 (1969), p. 305-327.

[22] L.A. Medeiros e M. Milla Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[23] L.A. Medeiros e M. Milla Miranda, *Espaços de Sobolev, Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[24] N. Meyers e J. Serrin, $H = W$, Proceedings Nat. Acad. Sci. USA, 51 (1964), p. 1055-1056.

[25] M. Milla Miranda, *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*, Textos de Métodos Matemáticos número 28, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.

[26] J. Necas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[27] L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), p. 271-290.

[28] F. Riesz e B. Sz. Nagy, *Functional Analysis*, Frederic Ungar Publishing Co, New York, 1955.

[29] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Vol. I, II, Hermann, Paris, 1951.

[30] S.L. Sobolev, *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, AMS, 1963.

[31] L. Tartar, *Topics in Nonlinear Analysis*, Publications Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, Orsay, 1978.

[32] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North Holland, 1979.

[33] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1965.

Apêndice

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, nº 1, 1988

Hidden Regularity for Semilinear Hyperbolic Partial Differential Equations

[1]M. Milla Miranda and [2]L.A. Medeiros

- **Résumé**. – "Hidden regularity" est un concept introduit par J.L. Lions dans [6] pour l'équation d'onde nonlinéaire $u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = 0$. Dans ce travail, les auteurs obtiennent le même type de régularité pour l'équation $u_{tt} - \Delta u + F(u) = 0$ où $F\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ satisfait les conditions de W.A. Strauss [9], c'est-à-dire, F est continue et $s\,F(s) \geq 0$. Dans §3 les auteurs développent certaines notions sur la trace de la dérivée normale.

- **Abstract**. – "Hidden Regularity" is a concept introduced by J.L. Lions in [6], for the nonlinear wave equation $u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = 0$. In the present work, the authors prove the same type of regularity for the equation $u_{tt} - \Delta u + F(u) = 0$ under the hypothesis of W.A. Strauss [9], i.e., $F\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ is continuous and $s\,F(s) \geq 0$. In §3 the authors develop certain notions about the trace of the normal derivative.

1. Introduction

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary Γ. By Q we represent the cylinder $\Omega\times\,]0,T[$, T an arbitrary positive real number. Let $F\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be a function satisfying:

$$F \quad \text{is continuous and } s\,F(s) \geq 0 \text{ for all } s \text{ in } \mathbb{R}. \tag{3.40}$$

In the cylinder Q we consider the semilinear hyperbolic equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + F(u) = 0 \text{ in } Q. \tag{3.41}$$

[1]Partially supported by CNPq - Brasil

[2]Instituto de Matemática - UFRJ Caixa Postal 68.530 CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

with initial data

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.42}$$

Let us represent by G the function

$$G(s) = \int_0^s F(r)\, dr. \tag{3.43}$$

It was proved by Strauss [9], that if F satisfies (3.40)) and

$$u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad G(u_0) \in L^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega), \tag{3.44}$$

then the equation (3.41), with initial conditions (3.42), has one solution u such that

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{3.45}$$

and we have the energy inequality

$$E(t) \leq E(0) = E_0\,. \tag{3.46}$$

The energy $E(t)$ is given by:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \big[\, |u'|^2 + |\nabla u(t)|^2 \big]\, ds + \int_\Omega G(u(t))\, dx.$$

In this paper we prove the following,

Theorem 1.1. *If we assume* (3.40), (3.44), *then equation* (3.41) *has one solution* u *satisfying* (3.45), *initial conditions* (3.42) *and*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma), \tag{3.47}$$

such that:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C\, E_0, \tag{3.48}$$

the constant C *depending only on* T *and* Ω.

Remark 1.1. From the properties (3.45) of the solutions u of (3.41) given by Theorem 1.1 we shall prove that:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^1\big(0,T; W^{(1/p)-2,p'}(\Gamma)\big) + H^{-1}\big(0,T; H^{(1/2)}(\Gamma)\big). \tag{3.49}$$

For the proof, look Proposition 3.4, §3 of this paper, where $p = 2$ if $n = 1, 2, 3$, $p < \dfrac{n}{2}$ if $n \geq 4$, and $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Observe that (3.47) does not follows from (3.49). This phenomenon was denominated "*Hidden Regularity*" by Lions, cf. [6], for the case $F(s) = |s|^\rho s$. We also can find results of hidden regularity motivated by problems of optimal control in Lions [5], for the linear case of (3.41), i.e., $Fu = u$.

In §2 we give the proof of Theorem 1.1. In §3 we study the trace of the normal derivative $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ for functions u that belong to the space

$$E = \big\{ v; v \in L^{p'}(\Omega),\, \Delta v \in L^1(\Omega) \big\},$$

p' as in the Remark 1.1. We did not find in the literature this direct proof.

2. Proof of Theorem 1.1

We will represent by $(\,,\,)$, $|\cdot|$ and $((\,,\,))$, $||\cdot||$ the inner product and norm, respectively, in $L^2(\Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$. By $H_0^1(\Omega)$ we represent the Sobolev space of order one whose functions have trace zero on the boundary of Ω and by $L^2(\Omega)$ the space of square integrable numerical functions on Ω. All functions considered in this paper are real valued. The existence proof follows the idea of Strauss [9].

Suppose u_0, u_1 given by (3.44). For each natural number j, let us consider the function $\beta_j \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ defined by:

$$\beta_j(s) = s \text{ if } |s| \leq j; \quad \beta_j(s) = j \text{ if } s > j; \quad \beta_j(s) = -j \text{ if } s < -j.$$

It follows by Kinderlehrer-Stampacchia [2], that $\beta_j(u_0) = u_{0j}$ belongs to $H_0^1(\Omega)$ for all $j \in \mathbb{N}$.

Let F and G as in (3.40), (3.43) and represent by F_k the Strauss approximation of F, that is, F_k, $k \in \mathbb{N}$, is a continuous function defined by:

$$\begin{cases} F_k(s) = (-k)\left[G\left(s - \dfrac{1}{k}\right) - G(s)\right] & \text{if} \quad -k \leq s \leq -\dfrac{1}{k} \\ F_k(s) = k\left[G\left(s + \dfrac{1}{k}\right) - G(s)\right] & \text{if} \quad \dfrac{1}{k} \leq s \leq k \\ F_k(s) \text{ is linear by parts} & \text{if} \quad -\dfrac{1}{k} < s \leq \frac{1}{k} \text{ with } F_k(0) = 0 \\ F_k(s) \text{ appropriate constants} & \text{for} \quad |s| > k. \end{cases} \tag{3.50}$$

It follows by Strauss [9], Cooper-Medeiros [1], that F_k is Lipschitz for each k, $s\,F_k(s) \geq 0$ and (F_k) converges to F uniformly on the compacts subsets of $\mathbb{R}$. Represent by $G_k(s) = \displaystyle\int_0^s F_k(r)\,dr$ and we obtain $G_k(0) = F_k(0)$, for all $k \in \mathbb{N}$.

Since $u_{0j} \in H_0^1(\Omega)$, let $(\varphi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ and $(\Psi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ be two sequences of elements of $\mathcal{D}(\Omega)$, space of C^∞ functions with compact support in Ω, such that

$$\varphi_{\mu j} \to u_{0j} \text{ in } H_0^1(\Omega), \quad \Psi_\mu \to u_1 \text{ in } L^2(\Omega), \quad \text{as } \mu \to \infty. \tag{3.51}$$

It follows by the above hypothesis, that there exists only one function $u_{\mu jk}$ which we represent by u such that:

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \\ u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \\ u'' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{3.52}$$

and u is a weak solution of the problem

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + F_k(u) = 0 \\ u(0) = \varphi_{\mu j}\,, \;\; u'(0) = \Psi_\mu\,. \end{cases} \tag{3.53}$$

The energy identity is verified by the solution $u = u_{\mu jk}$, i.e.,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\,|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\,||u(t)||^2 + \int_\Omega G_k(u(t))\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\,|\Psi_\mu|^2 + \frac{1}{2}\,||\varphi_{\mu j}||^2 + \int_\Omega G_k(\varphi_{\mu j})\,dx \end{aligned} \tag{3.54}$$

This result can be found in Lions [4], Strauss [8].

The next step is to prove that $(u_{\mu jk})$ converges to a solution of the initial value problem (3.41), (3.42) and the conditions (3.47), (3.48) are verified. So, we divide the proof in two parts. First on the existence of solutions and second on the estimate (3.48) of the normal derivative.

1. – Existence of Solutions

In this step we will bound the second member of (3.54) by a constant independent of μ, j and k. We obtain:

$$||u_{0j}|| \leq ||u_0|| \tag{3.55}$$

and

$$\int_\Omega G_k(\varphi_{\mu j})\,dx \to \int_\Omega G_k(u_{0j})\,dx \text{ as } \mu \to \infty. \tag{3.56}$$

We have:

$$G_k(\mu_{0j}(x)) \to G(u_{0j}(x)),\ \ k \to \infty,\ \text{ uniformly a.e. in } \Omega,$$

hence there exists a subsequence (G_{k_j}) of (G_k), which is denoted by (G_j), such that:

$$\int_\Omega |G_j(u_{0j}) - G(u_{0j})|\,dx \to 0, \ \text{ as } \ j \to \infty. \tag{3.57}$$

We also have $G(u_{0j}) \to G(u_0)$ a.e. in Ω and $G(u_{0j}) \leq G(u_0)$. As $G(u_0) \in L^1(\Omega)$, we have then

$$\int_\Omega |G(u_{0j}) - G(u_0)|\,dx \to 0, \ \text{ as } \ j \to \infty. \tag{3.58}$$

From (3.57) and (3.58) we obtain

$$\int_\Omega G_j(u_{0j})\,dx \to \int_\Omega G(u_0)\,ds \ \text{ as } \ j \to \infty. \tag{3.59}$$

Thus, from the convergences (3.51), (3.56), (3.59) and the property (3.55), it follows that for every $\varepsilon > 0$, the energy equality (3.54) can be estimated as follows:

$$\frac{1}{2}\left|u'_{\mu j}(t)\right|^2 + \frac{1}{2}||u_{\mu j}(t)||^2 + \int_\Omega G_j(u_{\mu j}(t))\,dx \leq E_0 + \varepsilon \tag{3.60}$$

for all $t \in [0,T]$ and $\mu \geq \mu_0$, $j \geq j_0$, where E_0 is defined by (3.46).

It follows from the estimte (3.60) that there exists subsequences $(u_{\mu j})$, (u_j) and a function u such that:

$$\begin{cases} u_{\mu j} \to u_j & \text{in} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \text{weak star as } \mu \to \infty \\ u'_{\mu j} \to u'_j & \text{in} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{weak star as } \mu \to \infty, \end{cases} \tag{3.61}$$

and

$$\begin{cases} u_j \to u & \text{in} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \text{weak star} \\ u'_j \to u' & \text{in} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{weak star,} \end{cases} \tag{3.62}$$

Taking limits in the approximated system (3.53) and using the convergences (3.61), we obtain:

$$\begin{cases} u_j'' - \Delta u_j + F_j(u_j) &= 0 \\ u_j(0) = u_{0j}\,,\ u_j'(0) &= u_1\,. \end{cases} \tag{3.63}$$

Remark 2.1. Strauss proved in [9], cf. Lions [4], Lemma 1.3, a convergence theorem for sequence of measurable functions, which permit us to pass to the limit in (3.63). This result says that if $F_j(u_j) \to F(u)$ a.e. in Q and

$$\int_0^T (F_j(u_j), u_j)\, dt < C, \ \ \forall\, j \tag{3.64}$$

then

$$F_j(u_j) \to F(u) \quad \text{strongly in} \quad L^1(Q). \tag{3.65}$$

Let us apply the result of Remark 2.1 in order to obtain the limit of (3.63) as $j \to \infty$. It is sufficient to verifty the conditions (3.64). In fact, from (3.63) we obtain

$$\int_0^T (F_j(u_j), u_j) dt = (u_1, u_{0j}) - (u_j'(T), u_j(T)) + \int_0^T \left|u_j'\right|^2\, dt - \int_0^T ||u_j||^2\, dt,$$

which by the inequality (3.60) is bounded by a constant independent of j, thus conditions of Remark 2.1 are verified.

Therefore, it is permissible to pass to the limit in (3.63) and obtain a solution u of (3.41). To verify the initial conditions (3.42) we use the usual argument, as in Lions [4], Strauss [9].

2. – Estimates for the Normal Derivative

The method used in this section is one applied by Lions [6]. First of all we prove a Lemma. Note that we use in this section the summation convention, i.e., terms like $h_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ means summation in i from one to n.

We consider functions h_i such that

$$h_i \in C^2(\overline{\Omega}) \quad \text{and} \quad h_i = \nu_i \quad \text{on} \quad \Gamma, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Lemma 2.1. *Let be $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Then*

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial u}{\partial \nu}\,, \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n).$$

From this it follows that $|\nabla u|^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2$.

Proof. In fact, let $\xi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ and let $\overline{\xi} \in H^m(\Omega)$, with $m > \max(n/2, 2)$, such that trace $\gamma_0\,\overline{\xi}$ on Γ is ξ. We know that $\overline{\xi}$ exists because $\mathcal{D}(\Gamma) \subset H^{m-1/2}(\Gamma)$. We have:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(wh_j\,\overline{\xi})\,dx = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j}(wh_j\,\overline{\xi})\,d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial w}{\partial \nu}\,\xi\,d\Gamma$$

for all $\xi \in \mathcal{D}(\Gamma)$. Note that Ω is regular. We also obtain

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(wh_j\,\overline{\xi}) = \int_\Gamma \nu_j \frac{\partial}{\partial x_i}(wh_j\,\overline{\xi})\,d\Gamma = \int_\Gamma \nu_j \frac{\partial w}{\partial x_i}\,\nu_j \xi = \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial x_i}\,\xi\,d\Gamma.$$

It follows that

$$\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial w}{\partial \nu}\,\xi\,d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial x_i}\,\xi\,d\Gamma \quad \text{for all} \quad \xi \in \mathcal{D}(\Gamma)$$

which implies the proof of Lemma 2.1.

Let $u_{\mu j} = u$ in the class (3.52) which is the solution of (3.53). We use $F_j = F$, $G_j = G$ to simplify the notation. Multiply both sides of equation (3.53) by $h_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ and integrate on Q, which is permissible. We obtain:

$$\int_Q u'' h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dxdt - \int_Q \Delta u \cdot h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dxdt + \int_Q (u) h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dxdt = 0. \tag{3.66}$$

We obtain:

$$\int_Q u'' h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dxdt = N - \frac{1}{2}\int_Q h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,(u')^2\,dxdt,$$

where

$$N = \left| \int_\Omega u' h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx \right|_{t=0}^{t=T};$$

$$\int_Q h_i \frac{\partial}{\partial x_i}(u')^2\,dxdt = \int_\Sigma h_i (u')^2\,\nu_i\,d\Sigma - \int_Q (u')^2 \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\,dxdt,$$

consequently, observing that $u'(t) \in H_0^1(\Omega)$ in $]0, T[$, we have:

$$\int_Q u'' h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dxdt = N + \frac{1}{2}\int_Q (u')^2 \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\,dxdt. \tag{3.67}$$

We also obtain:

$$-\int_Q \Delta u\, h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dxdt = \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dxdt - \int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \tag{3.68}$$

and

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_Q h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dxdt + \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\, dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Sigma h_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \nu_i \, d\Sigma - \frac{1}{2}\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\, dxdt +$$

$$+ \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\, dxdt.$$

Applying Lemma 2.1 to the first integral in second member of the above inequality, we get:

$$-\int_Q \Delta u h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dxdt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\Sigma - \frac{1}{2}\int_Q |\nabla u|^2 \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\, dxdt + \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\, dxdt. \tag{3.69}$$

Nothing that G is of class C^1 with bounded derivative and $G(0) = 0$, i.e., $G(u) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, we obtain

$$\int_Q F(u) h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dxdt = -\int_Q G(u)\frac{\partial h_i}{\partial x_i}\, dxdt. \tag{3.70}$$

Substituting (3.67), (3.69), (3.70) in (3.66) we obtain:

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma = N + \int_Q \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\,|u'|^2 - \frac{1}{2}\,|\nabla u|^2 - G(u)\right] dxdt +$$

$$+ \int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\, dxdt;$$

Using the inequality (3.60) in the second member of the last equality, we get:

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\, u_{\mu j}\right)^2 d\Sigma \leq C(E_0 + \varepsilon),$$

for all $\mu \geq \mu_0$, $j \geq j_0$, $\varepsilon > 0$, where $C > 0$ does not depend of μ, j, E_0, ε. Thus, we obtain a subsequence, still represented by $(u_{\mu j})$, such that

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\, u_{\mu j} \to \chi \quad \text{weakly in} \quad L^2(0,T;L^2(\Gamma)) \text{ as } \mu, j \to \infty, \tag{3.71}$$

and as ε is arbitrary, we have:

$$||\chi||_{L^2(\Sigma)} \leq C\, E_0\,. \tag{3.72}$$

In the next section we will prove that $\dfrac{\partial}{\partial\nu}\, u_j \to \dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ weak star in

$$\big(L^\infty\big(0,T; W^{2-\frac{1}{2},p}(\Gamma)\big)\big) \cap H_0^1\big(0,T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\big),$$

for $p \geq 2$ and $p > \dfrac{n}{2}\cdot$ We note that by W' we represent the topological dual of W. It follows from (3.71) that $\left(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\, u_j\right)$ converges to χ in the above space and consequently $\chi = \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\cdot$ This fact and (3.72) complete the proof of Theorem 1.1. ■

3. Trace of Normal Derivative

We summarize this section as follows. First of all we prove that $-\Delta u = -F(u) - u''$ can be written in the form $-\Delta u = \Delta y + \Delta z'$; then we show that $u = -y - z'$; we prove that the traces of $\dfrac{\partial y}{\partial\nu}\,,\ \dfrac{\partial z'}{\partial\nu}$ are defined, consequently the trace of $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ is defined, and to complete the argument we obtain the convergence of $\dfrac{\partial}{\partial y}\, u_j = -\dfrac{\partial}{\partial\nu}\, y_j - \dfrac{\partial}{\partial\nu}\, z_j'$ to $\dfrac{\partial u}{\partial\nu} = -\dfrac{\partial y}{\partial\nu} - \dfrac{\partial z'}{\partial\nu}$ in an appropriate space which contains $L^2(\Sigma)$, equipped with the weak topology. The main difficult in this procedure is because the nonlinear term $F(u)$ belongs to $L^1(0,T; L^1(\Omega))$.

In order to have a better notation we represent by $\gamma_0 w$, $\gamma_1 w$ the traces, respectively, of the function w and of its normal derivative, as is done usually.

By the symbol (f,g) we still represent the integral on Ω of fg and by $\langle f,g\rangle$ the duality pairing between W and its topological dual W'. In all this section the numbers p, p' satisfy the conditions:

$$p = 2 \text{ if } n = 1,2,3; \quad p > \frac{n}{2} \text{ if } n \geq 4, \quad \text{ and } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3.73}$$

It follows that $W^{2,p}(\Omega)$ is continuously embedded in $C(\overline{\Omega})$.

To begin we prove the existence of solutions for the problem:

$$\begin{cases} -\Delta y = f & \text{in} \quad \Omega, \text{ with } f \in L^1(\Omega) \\ y = 0 & \text{on} \quad \Gamma. \end{cases}$$

This will be proved by transposition method, cf. Lions [3] and Lions-Magenes [7].

Proposition 3.1. *If $f \in L^1(\Omega)$, there exist only one function $y \in L^{p'}(\Omega)$ such that*

$$\int_\Omega y(-\Delta w)\,dx = \int_\Omega fw\,dx, \ \textit{for each } w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.74}$$

The application $Tf = y$ from $L^1(\Omega)$ in $L^{p'}(\Omega)$ is linear and continuous and $-\Delta y = f$.

Proof. Let $h \in L^p(\Omega)$ and w be the solution of the problem:

$$\begin{cases} -\Delta w = h \\ w = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3.75}$$

Then, by the regularity of the solutions of elliptic equations, it follows that $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Let S be the application

$$Sh = w \quad \text{from} \quad L^p(\Omega) \quad \text{in} \quad C(\overline{\Omega}),$$

where w is the solution of (3.75). Then S is linear and continuous. Let S^* be the transpose of S, that is:

$$S^*\colon (C(\overline{\Omega}))' \longrightarrow L^{p'}(\Omega).$$

The function $y = S^*f$ satisfies the conditions (3.74). In fact, $\langle S^*f, h\rangle = \langle f, Sh\rangle$, that is:

$$\int_\Omega y(-\Delta w)\,dx = \int_\Omega fw\,dx.$$

To prove the uniqueness, let y_1, y_2 in $L^{p'}(\Omega)$ satisfying (3.74). Then

$$\int_\Omega (y_1 - y_2)(-\Delta w)\,dx = 0, \ \text{for all } w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

Let $h \in L^p(\Omega)$ and w solution of problem (3.75). Then by the last equality we have:

$$\int_\Omega (y_1 - y_2)h\,dx = \quad \text{for all} \quad h \in L^p(\Omega),$$

which implies $y_1 = y_2$. Therefore, the uniqueness is proved.

Since $T = S^*$ on $L^1(\Omega)$ and S^* is linear and continuous, it follows that T has the same properties. ■

Let us represent by E the Banach space

$$E = \left\{ v \in L^{p'}(\Omega); \Delta w \in L^1(\Omega) \right\}$$

with the norm:

$$\|v\|_E = ||v||_{L^{p'}(\Omega)} + ||\Delta v||_{L^1(\Omega)} .$$

The next step in our argument, is to prove that $\gamma_1 v$ is defined for all $v \in E$. We follows the usual method, as in Lions [3]. By $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ we represent the restrictions of the test functions φ of $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ to the bounded open set Ω.

Lemma 3.1 $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *is dense in* E.

Proof. Let $M \in E'$ be such that $M\varphi = 0$ for all $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

We must prove that $M = 0$.

We can consider E as a closed subspace of $L^{p'}(\Omega) \times L^1(\Omega) = \mathcal{W}$. Let $\widetilde{M}$ be the continuous linear extension of M to $\mathcal{W}$. Then there exists $f \in L^p(\Omega)$ and $h \in L^\infty(\Omega)$ such that

$$\widetilde{M}([\xi, \eta]) = (f, \xi) + (h, \eta) \quad \text{for all} \quad [\xi, \eta] \in \mathcal{W}.$$

In particular,

$$Mv = (f, v) + (h, \Delta v) \quad \text{for all} \quad v \in E. \tag{3.76}$$

Let $\tilde{f}$ and $\tilde{h}$ be the extension of f and h to $\mathbb{R}^n$, zero outside Ω. Consider $\emptyset \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ and let $\varphi = \emptyset$ on $\overline{\Omega}$. By (3.76) we have:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\tilde{f} + \Delta \tilde{h}] \emptyset \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} \emptyset \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h} \Delta \emptyset \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx + \int_\Omega h \Delta_\varphi \, dx = 0$$

that is,

$$\tilde{f} + \Delta \tilde{h} = 0. \tag{3.77}$$

We have $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{h} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ and by (3.77) $-\Delta \tilde{h} = \tilde{f}$. As $p \geq 2$ and Ω is bounded it follows that

$$\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \tilde{h} \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{and} \quad -\Delta \tilde{h} = \tilde{f}.$$

By Fourier transform we obtain $\tilde{h} \in H^2(\mathbb{R}^n)$. As Ω is regular, we deduce from there that

$$h \in H_0^2(\Omega). \tag{3.78}$$

Consider an open ball B of $\mathbb{R}^n$ which contains Ω. Let w be the solution of the problem:

$$\begin{cases} -\Delta w = \tilde{f} & \text{in} \quad B \\ w = 0 & \text{on the boundary of } B \end{cases} \tag{3.79}$$

As $\tilde{f} \in L^p(B)$, $\tilde{f}$ restrict to B, it follows by the regularity theorem, that

$$w \in W^{2,p}(B) \cap W_0^{1,p}(B). \tag{3.80}$$

By (3.78) and (3.80) it follows that

$$\tilde{h}, w \in H^2(B) \cap H_0^1(B)$$

and by (3.77), (3.79) these both functions are solutions of

$$\begin{cases} -\Delta z = \tilde{f} & \text{in} \quad B \\ z = 0 & \text{on the boundary of } B. \end{cases}$$

By the uniqueness result, we have $\widetilde{h} = w$. It then follows that $\widetilde{h}$ belongs to $W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, hence

$$h \in W_0^{2,p}(\Omega). \tag{3.81}$$

Let $v \in E$. By (3.81) there exists a sequence (φ_ν) of elements of $\mathcal{D}(\Omega)$ such that (φ_ν) converges to h in $W_0^{2,p}(\Omega)$. By the limits in $(\varphi_\nu, \Delta v) = (\Delta\varphi_\nu, v)$ it follows that

$$(h, \Delta v) = (\Delta h, v). \tag{3.82}$$

Substituting (3.82) in (3.76) and observing that $f + \Delta h = 0$ in Ω we prove that $M = 0$. ■

Proposition 3.2. *There exists an application* $\gamma v = [\gamma_0 v, \gamma_1 v]$ *from* E *to* $W^{\frac{1}{2}-1,p'}(\Gamma) \times W^{\frac{1}{2}-2,p'}(\Gamma)$, *linear and continuous such that:*

$$\gamma\varphi = \left[\varphi|_\Gamma , \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_\Gamma \right], \quad \text{for all } \varphi \text{ in } \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Proof. We shall use the notation:

$$X = W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma), \quad Y = W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma), \quad Z = X \times Y.$$

By the trace theorem, Lions [3], for each $[\xi, \eta] \in Z$, there exists a function $w \in W^{2,p}(\Omega)$ such that $\gamma_0 w = \xi$ and $\gamma_1 w = \eta$. The condition (3.73) implies by Sobolev theorem that $W^{2,p}(\Omega)$ is continuously embedded in $C(\overline{\Omega})$. For each $v \in E$ we define the functional T_v on Z by

$$T_v([\xi, \eta]) = (v, \Delta w) - (\Delta v, w). \tag{3.83}$$

It is easy to show that T_v is well defined. We have:

$$|T_v[\xi,\eta]| \leq C\big[||v||_{L^{p'}(\Omega)} + ||\Delta v||_{L^1(\Omega)}\big]\,\big[||\xi||_X + ||\eta||_Y\big] = C||v||_E\,||[\xi,\eta]||_Z\,.$$

Thus,

$$T_v \in Z' \quad \text{and} \quad ||T_v||_{Z'} \leq C||v||_E\,. \tag{3.84}$$

Let $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. By the definition (3.83) and Green formula, we obtain:

$$T_\varphi([\xi,\eta]) = \langle \gamma_0\varphi, \eta\rangle - \langle \gamma_1\varphi, \xi\rangle = \langle [-\gamma_1\varphi, \gamma_0\varphi], [\xi,\eta]\rangle. \tag{3.85}$$

From (3.84) and (3.85) it follows that we have established an application σ given by:

$$\sigma(\varphi) = [-\gamma_1\varphi, \gamma_0\varphi] \quad \text{from} \quad \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \ \text{ to } \ X' \times Y',$$

linear and continuous, where $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ is equipped with the topology induced by that one of E.

Let τ be the application

$$\tau([-\gamma_1\varphi, \gamma_0\varphi]) = [\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi] \quad \text{from} \quad Z' \ \text{ to } \ Z'.$$

Since $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ is dense in E, it follows that the extension of $\gamma = \tau \cdot \sigma$ to E satisfies the conditions of Proposition 3.2. ■

Let u be the solution obtained in Theorem 1.1. Then

$$-\Delta u = -F(u) - u'',$$

with $F(u) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ and $u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. By the Propositions 3.1, 3.2 and regularity theorem for elliptic equations, it follows that there exists unique functions

$$y \in L^1(0,T;L^{p'}(\Omega)) \quad \text{and} \quad z \in L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \tag{3.86}$$

such that

$$-\Delta y = F(u) \quad \text{and} \quad -\Delta z = u'.$$

Consequently

$$-\Delta u = \Delta y + (\Delta z)'. \tag{3.87}$$

Remark 3.1. Let be $v \in L^{p_1}(0,T;L^{q_1}(\Omega))$, $\Delta v \in L^{p_2}(0,T;L^{q_2}(\Omega))$, $1 \leq p_i\,,\, q_i \leq \infty$, $i = 1,2$. Then

$$\Delta \int_0^T v(t)\theta(t)\,dt = \int_0^T (\Delta v)(t)\theta(t)\,dt \quad \text{for all} \quad \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

This is a consequence of the fact that $\langle \Delta v, \theta\varphi \rangle = \langle v, \theta \Delta\varphi \rangle$ for all $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 3.3. *We have*

$$u = -y - z^1$$

where y, z are defined by (3.87).

Proof. We observe that $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Let $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$. By Remark 3.1 and observing that $-\Delta$ is continuous from $H_0^1(\Omega)$ to $H^{-1}(\Omega)$, we obtain from (3.87):

$$-\Delta \int_0^T u\theta \, dt = \Delta \int_0^T y\theta \, dt - \Delta \int_0^T z\theta' \, dt,$$

that is

$$-\Delta \left[\int_0^T u\theta \, dt - \int_0^T z\theta' \, dt \right] = -\Delta \int_0^T (-y)\theta \, dt. \tag{3.88}$$

Let us consider:

$$U = \int_0^T u\theta \, dt - \int_0^T z\theta' \, dt, \quad V = \int_0^T (-y)\theta \, dt \ \text{ and } \ f = (-\Delta)V.$$

We want to show that U and V are solutions of the problem

$$\begin{cases} v \in L^{p'}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega v(-\Delta w) dx = \int_\Omega f w \, dx, \ \text{for all } w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{3.89}$$

Therefore, by the uniqueness given by Proposition 3.1, we get $U = V$ and we have the proof of the Proposition 3.3.

We have $U \in L^{p'}(\Omega)$ because $p \geq 2$. Let $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Then

$$\int_\Omega U(-\Delta u) dx = \int_0^T \theta \left[\int_\Omega u(-\Delta w) dx \right] dt - \int_0^T \theta' \left[\int_\Omega z(-\Delta w) dx \right] dt.$$

As $-\Delta u \in W^{-1,p'}(\Omega)$, because $p \geq 2$, it follows that $\langle -\Delta u, w \rangle = (u, -\Delta w)$. Also, $\langle -\Delta z, w \rangle = (z, -\Delta w)$. Therefore,

$$\int_\Omega U(-\Delta w) \, dx = \left\langle \int_0^T (-\Delta u)\theta \, dt, w \right\rangle - \left\langle \int_0^T (-\Delta z)\theta', w \right\rangle.$$

From (3.87) and Remark 3.1, it follows:

$$\int_\Omega U(-\Delta w) \, dx = \int_\Omega f w \, dx.$$

It is clear that V is a solution of (3.89). Then U, V are solutions of (3.89) which proves Proposition 3.3. $\blacksquare$

To know in what space $\gamma_1 u$ is localized we need the following lemma.

Lemma 3.2. *We have* $\gamma_1 z' = (\gamma_1 z)'$.

Proof. The set

$$\big\{\alpha\varphi; \alpha \in \mathcal{D}(0,T),\, \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})\big\}$$

is total in $L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Then there exists a sequence (z_μ) such that

$$z_\mu = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{j\mu}\varphi_{j\mu} \to z \quad \text{in} \quad L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{3.90}$$

We have then

$$\int_0^T z_\mu \theta' \, dt \to \int_0^T z\theta' \, dt \quad \text{in} \quad H^2(\Omega), \quad \theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

whence

$$\gamma_1 \int_0^T z_\mu \theta' \, dt \to \gamma_1 \int_0^T z\theta' \, dt \quad \text{in} \quad H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.91}$$

Also, by (3.90) we have:

$$\gamma_1 z_\mu \to \gamma_1 z \quad \text{in} \quad L^2\big(0,T;H^{1/2}(\Gamma)\big)$$

therefore

$$\int_0^T (\gamma_1 z_\mu)\theta' \, dt \to \int_0^T (\gamma_1 z)\theta' \, dt \quad \text{in} \quad H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.92}$$

From (3.91), (3.92), since

$$\gamma_1 \int_0^T z_\mu \theta' \, dt = \int_0^T (\gamma_1 z_\mu)\theta' \quad \text{for all} \quad \theta' \in \mathcal{D}(0,T).$$

It follows the proof of Lemma 3.2. $\blacksquare$

Remark 3.2. As $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, by the same argument used in the proof of Lemma 3.2, we obtain:

$$\gamma_0\, u^{(k)} = (\gamma_0 u)^{(k)} = 0, \quad u^{(k)} = d^k u/dt^k,$$

for all natural number k.

As a consequence of (3.86), Propositions 3.2, 3.3 and Lemma 3.2, it follows that

Proposition 3.4. *We have*

$$\gamma_1 u \in L^1\big(0,T;W^{\frac{1}{p}-2,p'}(\Gamma)\big) + H^{-1}\big(0,T;H^{1/2}(\Gamma)\big).$$

Let u_j be the approximate solution introduced in the proof of Theorem 1.1, that is, $-\Delta u_j = -F_j(u_j) - u_j''$. By the Proposition 3.3 we can write

$$u_j = -y_j - z_j' \quad \textit{where} \quad -\Delta y_j = F_j(u_j) \quad \textit{and} \quad -\Delta z_j = u_j'\,. \tag{3.93}$$

We have that $\gamma_1 u_j$ belongs to the space given in Proposition 3.4.
In this conditions we obtain the following result:

Proposition 3.5. *We have*

$$\gamma_1 u_j \to \gamma_1 u \quad \textit{in} \quad \Big(L^\infty\big(0,T;W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma)\big) \cap H_0^1\big(0,T;H^{1/2}(\Gamma)\big)\Big)' \tag{3.94}$$

weak star.

Proof. We note that $F_j(u_j) \to F(u)$ in $L^1(0,T;L^1(\Omega))$; consequently from

$$||y_j - y||_E = ||y_j - y||_{L^{p'}(\Omega)} + ||\Delta y_j - \Delta y||_{L^1(\Omega)} \le c||F_j(u_j) - F(u)||_{L^1(\Omega)}\,,$$

it follows that

$$y_j \to y \quad \text{in} \quad L^1(0,T;E),$$

which, by Proposition 3.2 implies:

$$\gamma_1 y_j \to \gamma_1 y \quad \text{in} \quad L^1\big(0,T;W^{\frac{1}{p}-2,p1}(\Gamma)\big). \tag{3.95}$$

Also nothing that $u_j' \to u'$ in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ weak and by

$$||\gamma_1 z_j - \gamma_1 z||_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c||z_j - z||_{H^2(\Omega)} \le c||u_j' - u'||_{L^2(\Omega)}\,,$$

we obtain that

$$\gamma_1 z_j \to \gamma_1 z \quad \text{in} \quad L^2\big(0,T;H^{1/2}(\Gamma)\big) \quad \text{weak}. \tag{3.96}$$

Let $\xi \in W$ where W' is the space in (3.94). One has by Lemma 3.2

$$\langle \gamma_1 u_j, \xi \rangle = -\langle \gamma_1 y_j, \xi \rangle + \langle \gamma_1 z_j, \xi' \rangle.$$

Then, by (3.95), (3.96) we obtain

$$\langle \gamma_1 u_j, \xi \rangle \to \langle \gamma_1 u, \xi \rangle$$

which proves Proposition 3.5 and consequently the proof of Theorem 1.1 is complete.
■

REFERENCES

[1] Cooper (J.) and Medeiros (L.A.). *The Cauchy problem for nonlinear wave equations in domains with moving boundary*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa XXVI 1972, p. 829-838.

[2] Kinderlehrer (D.) and Stampacchia (G.). *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[3] Lions (J.L.). *Problèmes aux Limites dans les Équations aux Dérivées Partielles*, Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal, 1965.

[4] Lions (J.L.). *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[5] Lions (J.L.). *Contrôle des Systèmes Distribués singuliers*, Gauthiers-Villars, Paris, 1983.

[6] Lions (J.L.). *Hidden regularity in some nonlinear hyperbolic equations*, Matemática Aplicada e Computacional, Vol. 6, Nº 1 1987, p. 7-15.

[7] Lions (J.L.) and Magenes (E.). *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol. I, Dunod, Paris, 1968.

[8] Strauss (W.A.). *The Energy Method in Nonlinear Partial Differential Equations*, Notas de Matemática 47, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 1969.

[9] Strauss (W.A.). *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations*, An. Acad. Bras. Ciências 42 (4) 1970, p. 645-651.

(Manuscrit reçu le 25 mars 1987)

Índice